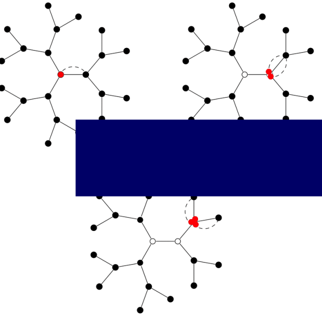
PGE977 - Tópicos Especiais em Processos Estocásticos

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE



PERCOLAÇÃO ACESSÍVEL

Prof. Pablo M. Rodriguez

https://www.pablo-rodriguez.org

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN

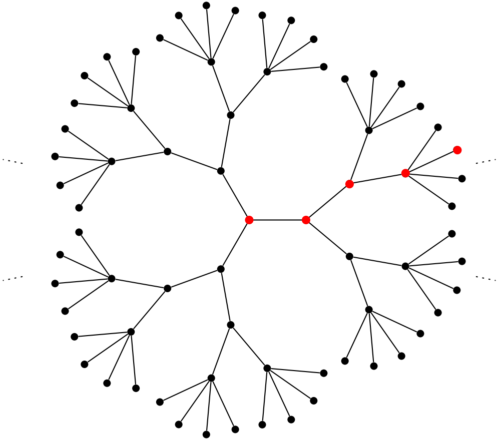
Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo

- Percolação acessível em árvores n-árias
- Percolação acessível em árvores esfericamente simétricas

Percolação acessível: problema

Ingredientes: uma árvore $T = (V, E)$ e v.a. continuas $(X_v)_{v \in V}$ i.i.d.



Interesse: existência de caminhos $v_1, v_2, v_3, \ldots$ tais que $X_{v_1} < X_{v_2} < X_{v_3} < \cdots$

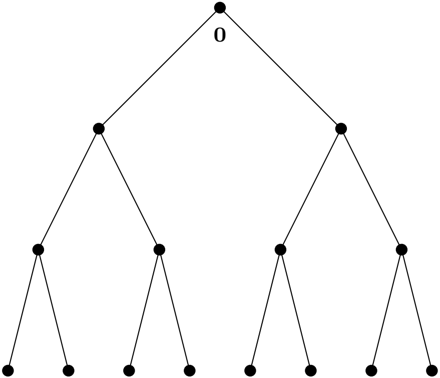
Motivação do modelo básico

Modelo de percolação inspirado em questões de biologia evolutiva:

"Imagine a population of some lifeform endowed with the same genetic type (genotype). If a mutation occurs, a new genotype is created which can die out or replace the old one. Provided natural selection is sufficiently strong, the latter only happens if the new genotype has larger fitness. As a consequence, on longer timescales the genotype of the population takes a path through the space of genotypes along which the fitness is monotonically increasing." (Nowak e Krug, 2013)

Sobre o primeiro trabalho: árvores n-árias

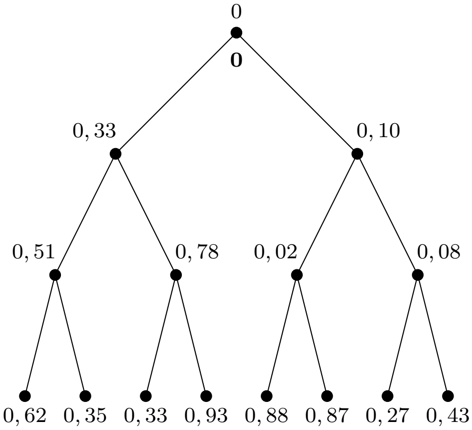
Nowak e Krug (Europhys. Lett. 2013)



Considere uma árvore n-ária de altura h. Aqui: $n = 2$ e $h = 3$.

Sobre o primeiro trabalho: árvores n-árias

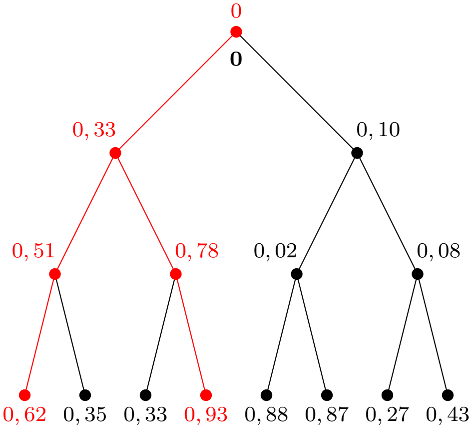
Nowak e Krug (Europhys. Lett. 2013)



Para cada vértice v associamos $X_v \sim \mathit{Uniforme}(0,1)$ de uma sequência i.i.d.

Sobre o primeiro trabalho: árvores n-árias

Nowak e Krug (Europhys. Lett. 2013)



Contamos número de caminhos $v_1, v_2, \ldots$ tais que $X_{v_1} < X_{v_2} < \cdots$

Sobre o primeiro trabalho: árvores n-árias

Seja $N_h = \#$ caminhos acessíveis conectando **0** com o último nível.

Teorema de Nowak y Krug (2013)

Se $n := n(h) = \alpha h$, *com* $\alpha > 0$ *uma constante, então*

$$\lim_{h \to \infty} \mathbb{P}\left(N_h \geq 1\right) \begin{cases} = 0, & se\ \alpha \leq e^{-1}, \\ > 0, & se\ \alpha > 1. \end{cases}$$

Ref.: *Nowak e Krug (2013). Accessibility percolation on n-trees, Europhys. Lett.* **101**, *66004.*

Ideia da prova de Nowak e Krug

$$\mathbb{E}(N_h) \geq \mathbb{P}\left(N_h \geq 1\right) \geq \frac{\mathbb{E}\left(N_h\right)^2}{\mathbb{E}\left(N_h^2\right)},$$

junto com

$$\mathbb{E}\left(N_h\right) = \frac{n^h}{h!},$$

e

$$\mathbb{E}\left(N_h^2\right) \leq \mathbb{E}\left(N_h\right) + \mathbb{E}\left(N_h\right)^2 + \sum_{k=1}^{h-1} \binom{2k}{k} \frac{n^{h+k}}{(h+k)!}.$$

Fica a questão!

$$\ldots \textit{ o que acontece se } \alpha \in (e^{-1}, 1]\text{?}$$

A resposta

Teorema de Roberts y Zhao (2013)

Se $n = \alpha h$, *com* $\alpha > e^{-1}$, *então*

$$\lim_{h\to\infty} \mathbb{P}\left(N_h \geq 1\right) = 1.$$

Ref.: *Roberts e Zhao (2013). Increasing paths in regular trees, Electron. Commun. Probab.* **18**, *1-10.*

Se $n = \alpha h$ então $\alpha_c = e^{-1}$:

$$\lim_{h\to\infty} \mathbb{P}\left(N_h \geq 1\right) = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha \leq e^{-1}, \\ 1, & \text{se } \alpha > e^{-1}. \end{cases}$$

Revisão de resultados

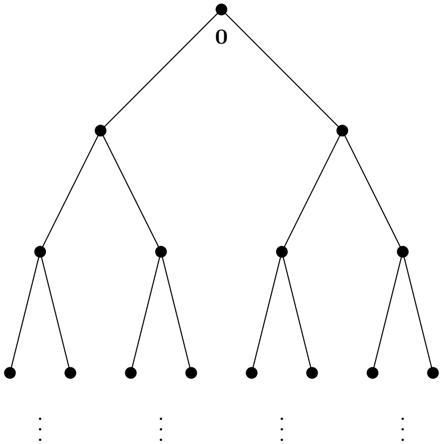
Accessibility percolation in random fitness landscapes,

by Joachim Krug (Institute for Theoretical Physics, University of Cologne).

To appear in "Probabilistic Structures in Evolution".

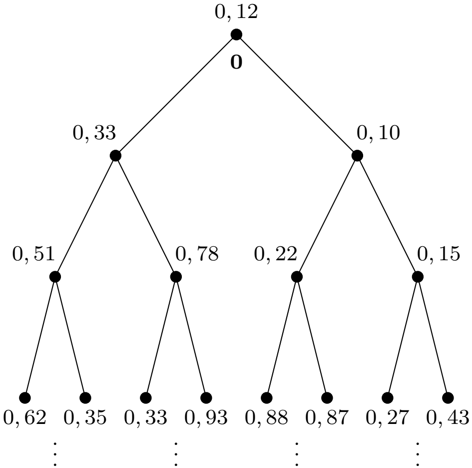
Preprint: arXiv:1903.11913 (68 referências!)

O modelo em árvores infinitas



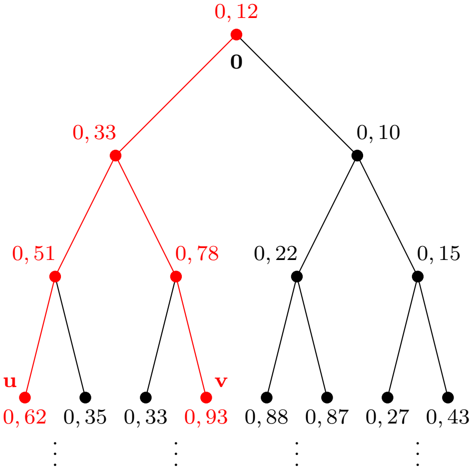
Considere uma árvore infinita, localmente finita $T = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$.

O modelo em árvores infinitas



Para cada $v \in \mathcal{V}$ associamos $X_v \sim U(0,1)$ de uma sequência i.i.d.

O modelo em árvores infinitas



Existe caminho $v_1, v_2, \ldots$ tal que $X_{v_1} < X_{v_2} < \cdots$ com probabilidad > 0?

Notação

Definição 1

Um caminho $v_0, v_1, \ldots, v_n$ *em* T *é acessível se*

$$X_{v_0} < X_{v_1} < X_{v_2} < \cdots < X_{v_n}.$$

Denotamos este evento por $v_0 \xrightarrow{c.a.} v_n$.

- Para cada $n \geq 1$, seja

$$\partial T_n = \{v \in V : \mathrm{dist}(\mathbf{0}, v) = n\}$$

e considere

$$\Lambda_n := \Lambda_n(T) = \bigcup_{v \in \partial T_n} \{\mathbf{0} \xrightarrow{c.a.} v\}.$$

Percolação acessível

Definition 1

Dizemos que há percolação acessível se o evento

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$$

ocorre.

Nosso interesse é estudar

$$\theta(T) := \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\Lambda_n).$$

Comparação de modelos

$T_1 \prec T_2$: mesma raiz e T_1 é sub-grafo de T_2.

Lema 1

Se $T_1 \prec T_2$, então $\theta(T_1) \leq \theta(T_2)$.

Ideia da prova: é por acoplamento, note que todo caminho acessível de T_1 é caminho acessível de T_2.

Árvores esfericamente simétricas

Definição 2

Uma árvore T é esfericamente simétrica com função de crescimento

$$f : \mathbb{N} \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$$

Árvores esfericamente simétricas

Definição 2

Uma árvore T é esfericamente simétrica com função de crescimento

$$f : \mathbb{N} \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$$

se:

- $grado(\mathbf{0}) = f(0),\ e$

Árvores esfericamente simétricas

Definição 2

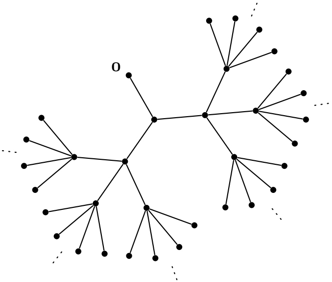
Uma árvore T é esfericamente simétrica com função de crescimento

$$f : \mathbb{N} \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$$

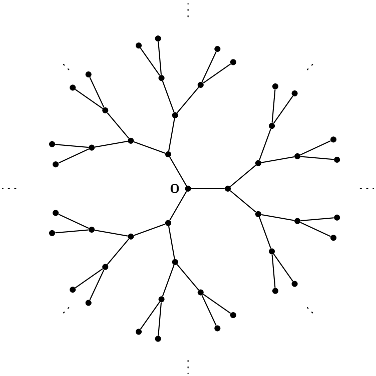
se:

- $grado(\mathbf{0}) = f(0)$, *e*
- $grado(v) = f(\text{dist}(\mathbf{0}, v)) + 1$, *para todo* $v \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Árvores esfericamente simétricas



(a) Árbol factorial $\mathbb{T}_!$.



(b) Árbol homogeneo $\mathbb{T}_d$.

Pergunta

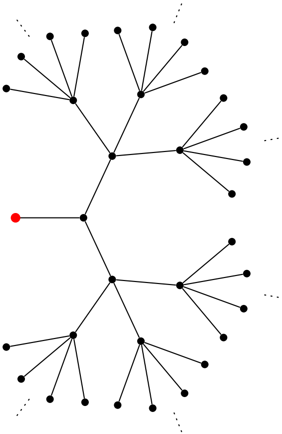
Quais condições deve satisfazer f ...

... para garantir percolação acessível com probabilidade positiva?

Exemplo: árvore fatorial

$|\partial T_{!,n}| = n!$

Na árvore fatorial $T_!$: $f(i) = i + 1,\ i \geq 0$



$$\mathbb{P}(\Lambda_n) = \mathbb{P}(N_n \geq 1) \leq \frac{|\partial T_{!,n}|}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

e tomando $n \to \infty$, temos $\theta(T_!) = 0$.

Transição de fase

Proposição 1

Seja T_α *tal que*

$$f(i) = \lceil (i+1)^\alpha \rceil, \quad i \geq 0$$

onde $\alpha > 0$ *é uma constante. Se* $\alpha \leq 1$*, então* $\theta(T_\alpha) = 0$*.*

A prova é por comparação com $T_!$, pois $T_\alpha \prec T_!$ e $\theta(T_!) = 0$.

Observação

Em geral, se $|\partial T_n|/(n+1)! \to 0$ *quando* $n \to \infty$ *então* $\theta(T) = 0$*.*

Transição de fase

Proposição 2

Seja T_α *tal que*

$$f(i) = \lceil (i+1)^\alpha \rceil, \quad i \geq 0$$

onde $\alpha > 0$ *é uma constante. Se* $\alpha > 1$, *então* $\theta(T_\alpha) > 0$.

A prova é por comparação com um processo de ramificação especial cuja sobrevivência implica percolação acessível em T_α.

Um trabalho conjunto com Bertacchi e Zucca (2020) permite concluir que se T é esfericamente simétrica com função de crescimento f, a condição

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{f(i)} < \infty$$

implica percolação acessível com probabilidade positiva.

Teorema de Coletti, Gava y Rodriguez (2018)

Seja T_α *tal que*

$$f(i) = \lceil (i+1)^\alpha \rceil, \quad i \geq 0$$

onde $\alpha > 0$ *é uma constante. Então,*

$$\theta(T_\alpha) \begin{cases} = & 0, \quad se\ \alpha \leq 1, \\ > & 0, \quad se\ \alpha > 1. \end{cases}$$

Referências

Modelos probabilísticos, Pablo M. Rodriguez.

In: Actas del XV Congreso "Dr. Antonio A. R. Monteiro" (2019).

Preprint: `https://www.pablo-rodriguez.org/publications`

Referencias adicionais:

- C. Coletti, R. Gava and P. M. Rodriguez, *On the existence of accessibility in a tree-indexed percolation model*, Physica A **492** (2018):382-388.

- D. Bertacchi, P.M. Rodriguez, and F. Zucca *G-W processes in varying environment and accessibility percolation*, Brazilian Journal of Probability and Statistics **34** (2020):613-628.