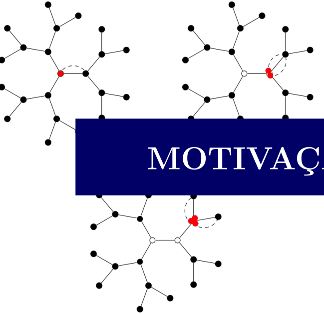
PGE966 - Processos Estocásticos

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE



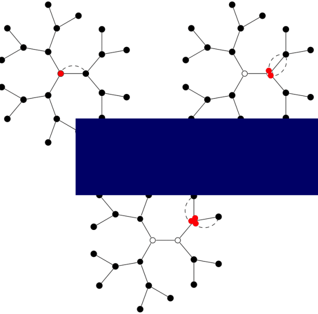
MOTIVAÇÃO. REVISÃO DE PROBABILIDADE

Prof. Pablo M. Rodriguez
https://www.pablo-rodriguez.org

Universidade Federal de Pernambuco
CCEN
Centro de Ciências Exatas e da Natureza

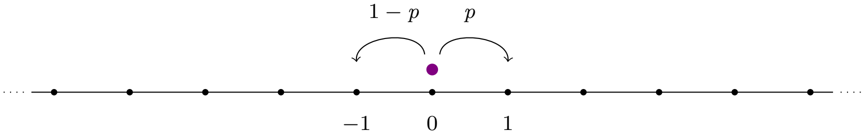
Conteúdo

- Motivação: três problemas!
- Revisão:
  - Axiomas de probabilidade e propriedades.
  - Sequências monótonas de eventos.
  - Probabilidade condicional e independência.



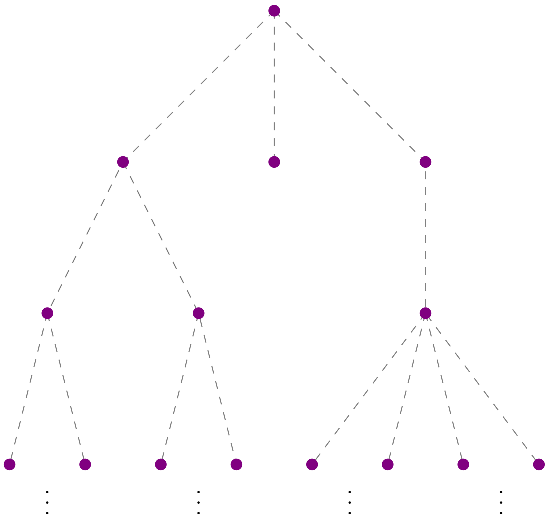
Motivação!

O passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



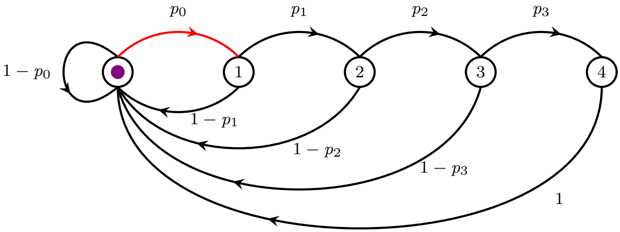
Pergunta: existe uma chance de não retornar ao ponto de partida?

Processo de ramificação



Pergunta: o processo continuara indefinidamente?

Passeio aleatório em um grafo finito orientado



Pergunta: qual é a probabilidade de que a partícula esteja em 0,

$\ldots$ *após* $n \gg 1$ *passos?*

Espaço de probabilidade: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

conjunto arbitrário $\left\{ \begin{array}{c} \mathcal{P}(\Omega) \text{ é o conjunto} \\ \text{das partes de } \Omega \end{array} \right\}$

$$P : \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega \in \mathcal{F} \\ A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F} \\ A_n \in \mathcal{F}, n \geq 1 \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F} \end{array} \right\}$$

medida de probabilidade

$$\left\{ \begin{array}{l} P(A) > 0 \\ P(\Omega) = 1 \\ P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \end{array} \right\}$$

(para $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$)

σ-álgebra de subconjuntos de Ω

Propriedades

No que segue $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é espaço de probabilidade e $A, A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$.

As seguintes propriedades resultam dos axiomas:

1. $P(\emptyset) = 0$.
   - *Prova:* Note que $P(\emptyset) = P(\emptyset \cup \emptyset) \overset{\mathbf{A3}}{=} 2P(\emptyset)$.
2. $P(A^c) = 1 - P(A)$.
   - *Prova:* $1 \overset{\mathbf{A2}}{=} P(\Omega) = P(A \cup A^c) \overset{\mathbf{A3}}{=} P(A) + P(A^c)$.
3. Se $A_1 \subset A_2$ então $P(A_1) \leq P(A_2)$.
   - *Prova:* Como $A_1 \subset A_2$ então $A_2 = A_1 \cup (A_2 \cap A_1^c)$. Logo,

$$P(A_2) = P(A_1 \cup (A_2 \cap A_1^c)) \overset{\mathbf{A3}}{=} P(A_1) + \underbrace{P(A_2 \cap A_1^c))}_{\geq 0 \text{ por } \mathbf{A1}} \geq P(A_1).$$

Propriedades

4. $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$.

   - *Prova:* Resulta de observar que

$$P(A_1) \overset{\textbf{A3}}{=} P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_2^c),$$

$$P(A_2) \overset{\textbf{A3}}{=} P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap A_1^c), \text{ e}$$

$$P(A_1 \cup A_2) \overset{\textbf{A3}}{=} P(A_1 \cap A_2^c) + P(A_1 \cap A_2) + P(A_1^c \cap A_2).$$

Fórmula de inclusão-exclusão:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j) \\ &+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots \\ &(-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right). \end{aligned}$$

Prova: por indução!

Universidade Federal de Pernambuco — CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Propriedades

5. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$

- *Prova:* Vamos reescrever $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ como uma união de eventos mutuamente exclusivos. Seja $B_1 := A_1$ e para cada $i \geq 2$ defina:

$$B_i := A_i \cap \left\{\bigcup_{k=1}^{i-1} A_k\right\}^c.$$

Assim, $B_i \cap B_j = \emptyset$ para $i \neq j$ e $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Então,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \overset{\textbf{A3}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

pela construção dos B_i's!

verifique!

Sequências de eventos

Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de eventos definimos:

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{e} \quad \limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Quando

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = A$$

dizemos que A é o limite de A_n e o denotamos como $\lim_{n\to\infty} A_n := A$.

Observação

Se $A_n \in \mathcal{F}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $\liminf_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{F}$ e $\limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Sequências monótonas de eventos

Dizemos que uma sequência de eventos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é:

(i) Não-decrescente, denotamos por $A_n \nearrow$, se

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \cdots$$

Nesse caso,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{ou seja} \quad A_n \nearrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

(ii) Não-crescente, denotamos por $A_n \searrow$, se

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \cdots$$

Nesse caso,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{ou seja} \quad A_n \searrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Continuidade da probabilidade

Teorema 1.1

Seja $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de eventos aleatórios.*

(i) *Se* $A_n \nearrow$ *então*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

(i) *Se* $A_n \searrow$ *então*

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Prova do Teorema 1.1 (i). Suponha que $A_n \nearrow$, seja $B_1 := A_1$ e

$$B_n := A_n \cap A_{n-1}^c \text{ para todo } n \geq 2.$$

Desta forma $B_i \cap B_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Logo,

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \\
&\overset{\textbf{A3}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\{ P(A_1) + \sum_{i=2}^{n} (P(A_i) - P(A_{i-1})) \right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} P(A_n).
\end{aligned}$$

Observação

Para (ii) note que $A_n \searrow$ implica que $A_n^c \nearrow$. Depois use (i).

Probabilidade condicional

Lembrete!

No que segue se considera um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Seja $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{F}$ tal que $P(B) > 0$.

A probabilidade condicional de A dado B é definida por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Observação

Seja $B \in \mathcal{F}$ tal que $P(B) > 0$. Se $P_B : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$ é definida por

$$P_B(A) := P(A|B),$$

para todo $A \in \mathcal{F}$ então P_B é uma probabilidade em $\mathcal{F}$. De fato:

- Verifique **A1** e **A2** para P_B.
- **A3** vale pois se $A_n \in \mathcal{F}$, para $n \in \mathbb{N}$, e $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$, então

$$P_B\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \frac{P\left(\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\} \bigcap B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{A_n \cap B\}\right)}{P(B)}.$$

Logo

$$P_B\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(A_n \cap B)}{P(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} P_B(A_n).$$

Teorema da Multiplicação

Se $A_i \in \mathcal{F}$, *para todo* $i \in 1, \ldots, n$. *Então,*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\cdots P\left(A_n \middle| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right).$$

Observação

Para $A, B \in \mathcal{F}$ *o teorema diz que* $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$.

Prova do teorema: Por indução em n. Verificado para $n = 2$, note que

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(A_n \cap \left\{\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right\}\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) P\left(A_n \middle| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right).$$

Teorema da Probabilidade Total

Se $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$, e a sequência forma uma partição de Ω, então

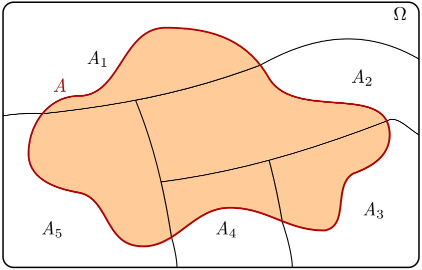
$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|A_i)P(A_i),$$

para todo $A \in \mathcal{F}$.

Observação

Para uma partição formada por n eventos aleatórios, o resultado é obtido fazendo $A_i = \emptyset$ para todo $i > n$.

Prova do Teorema da Probabilidade Total:



Como $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ é uma partição de Ω, então $A = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{A\cap A_i\}$ e a união é sobre eventos mutuamente exclusivos. Logo,

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\{A\cap A_i\}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A\cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|A_i)P(A_i).$$

Teorema de Bayes

Se $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$, *e a sequência forma uma partição de* Ω, *então para todo* $A \in \mathcal{F}$ *vale que*

$$P(A_i|A) = \frac{P(A|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A|A_i)P(A_i)},$$

para todo $i \in \mathbb{N}$.

Prova. Note que:

aplique T. da Multiplicação!

$$P(A_i|A) = \frac{P(A \cap A_i)}{P(A)}$$

aplique T. da Probabilidade Total!

Independência

Seja $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{F}$.

Os eventos aleatórios A e B são independentes se:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Observação

Se $A \in \mathcal{F}$ e $P(A) \in \{0, 1\}$ então A é independente de B para todo $B \in \mathcal{F}$.

Proposição 1.1

A é independente de si mesmo se, e somente se, $P(A) \in \{0, 1\}$.

Prova: Note que $P(A) = P(A \cap A)$, então:

$$A \text{ é independente de si mesmo} \Leftrightarrow P(A) = P(A)^2 \Leftrightarrow P(A) \in \{0, 1\}.$$

Proposição 1.2

Se A e B são independentes então A e B^c também são independentes.

Prova:

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c)$$

por independência de A e B!

De forma geral

- Os eventos aleatórios $A_1, \ldots, A_n$ são ditos de independentes se:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}),$$

  para todo $k \in \{2, \ldots, n\}$ e $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$.

- $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de eventos independentes se:

$$A_1, \ldots, A_n \text{ são independentes para todo } n \geq 2.$$

Observação

Não confundir com sequências de eventos independentes 2 a 2, para as quais vale apenas que $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$ *se* $i \neq j$.

Variáveis aleatórias

Uma variável aleatória X é uma função $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\{X \leq x\} \in \mathcal{F}, \text{ para todo x } \in \mathbb{R}$$

Observação!

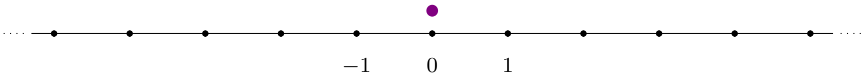
Usamos a seguinte notação: $\{X \leq a\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\}$.

Uma variável aleatória X é discreta se $X(\omega) \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ para todo $\omega \in \Omega$, para algum conjunto $\mathcal{S}$ finito ou enumerável. Neste caso

$$p(i) := P(X = i), i \in \mathcal{S},$$

é a função de probabilidade de X.

O passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



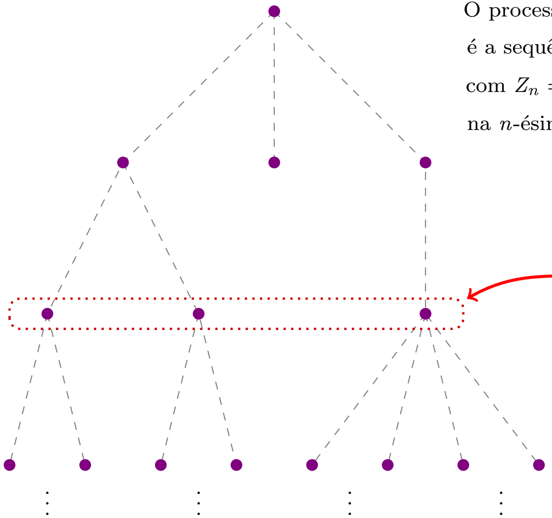
O passeio aleatório é a sequência

$$X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$$

denotada $(X_n)_{n \geq 0}$, com X_n = posição da partícula após o n-ésimo salto.

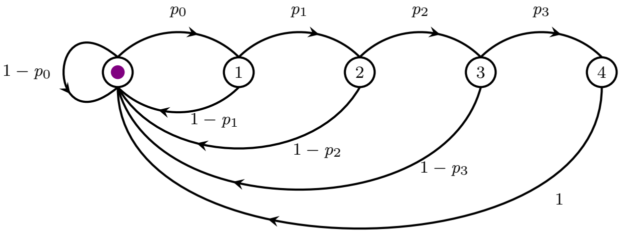
Processo de ramificação

O processo de ramificação é a sequência $(Z_n)_{n\geq 0}$, com $Z_n = \#$ de partículas na n-ésima geracão.



2da geração

Passeio aleatório em um grafo finito orientado



O passeio aleatório neste grafo também é uma sequência

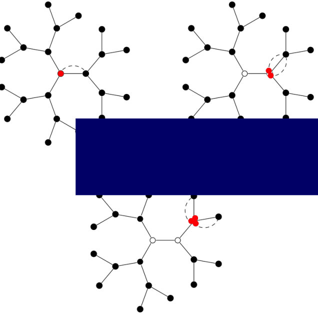
$$(X_n)_{n \geq 0},$$

com X_n = posição da partícula após o n-ésimo salto.

Referências para a revisão de probabilidade

R. Schinazi. Classical and Spatial Stochastic Processes, Birkhäuser Boston, 1999. Ver também: Uma introdução aos processos estocásticos espaciais, IMPA, 1995.

Sheldon M. Ross. Introduction to Probability Models. 10th ed. Academic Press. 2010.



Bom estudo!