Aula 3: Independência

Disciplina: PGE950 - Probabilidade

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE

Prof. Pablo M. Rodriguez

http://www.pablo-rodriguez.org

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo desta aula

- Independência
- Exemplos e propriedades
- O problema da ruína do jogador

Independência: motivação

Experimento: Jogue dois dados equilibrados e observe o número das faces superiores.

Ω	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Independência: motivação

Experimento: Jogue dois dados equilibrados e observe o número das faces superiores.

Ω	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

A

Se $A =$"soma dos números é 5" então $P(A) = 1/9$.

Independência: motivação

Suponha agora que sabe que o evento B =“o menor dos números é o 2” ocorreu.

Ω	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

A

B

Então $P(A|B) = 2/9 \neq P(A)$.

Independência: motivação

Suponha agora que sabe que o evento C =“o número observado no segundo dado é par” ocorreu.

Ω	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

A

C

Então $P(A|C) = 2/18 = 1/9 = P(A)$.

Independência

Lembrete!

No que segue se considera um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Seja $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{F}$.

Os eventos aleatórios A e B são independentes se:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Observação

Se $A \in \mathcal{F}$ *e* $P(A) \in \{0, 1\}$ *então* A *é independente de* B *para todo* $B \in \mathcal{F}$.

Proposição 3.1

A é independente de si mesmo se, e somente se, $P(A) \in \{0, 1\}$.

Prova: Note que $P(A) = P(A \cap A)$, então:

$$A \text{ é independente de si mesmo} \Leftrightarrow P(A) = P(A)^2 \Leftrightarrow P(A) \in \{0, 1\}.$$

Proposição 3.2

Se A e B são independentes então A e B^c também são independentes.

Prova:

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c)$$

por independência de A e B!

De forma geral

- Os eventos aleatórios $A_1, \ldots, A_n$ são ditos de independentes se:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}),$$

para todo $k \in \{2, \ldots, n\}$ e $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$.

- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de eventos independentes se:

$$A_1, \ldots, A_n \text{ são independentes para todo } n \geq 2.$$

Observação

Não confundir com sequências de eventos independentes 2 a 2, para as quais vale apenas que $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$ se $i \neq j$.

Exemplo 3.1

Jogue dois dados equilibrados e observe o número das faces superiores.

Considere os eventos:

$$A = \text{“o número observado no primeiro dado é ímpar”};$$

$$B = \text{“o número observado no segundo dado é ímpar”};$$

$$C = \text{“a soma dos números observados é ímpar”}.$$

Então, A, B e C são independentes 2 a 2 mas

$$P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0 \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C).$$

Exemplo 3.2

Considere o experimento de realizar sucessivos lançamentos independentes de uma moeda que tem probabilidade p de dar cara, com $p \in (0,1)$. Determine a probabilidade de que seja necessário realizar pelo menos n lançamentos antes de observar a primeira cara.

Solução: *Considere os eventos*

$$C_i = \text{“o } i\text{-ésimo lançamento resulta em cara”},$$

para $i \in \mathbb{N}$ e note que o evento de interesse é dado por

$$\bigcap_{i=1}^{n} C_i^c.$$

Logo,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} C_i^c\right) = \prod_{i=1}^{n} P(C_i^c) = (1-p)^n.$$

Sobre padrões na poesia: o trabalho de Markov (1913)

O matemático russo A.A. Markov gastou horas contando padrões de vogais e consoantes das primeiras

20.000 **letras**

de um poema de Alexander Pushkin.

Sobre padrões na poesia: o trabalho de Markov (1913)

Considere os eventos

$$V_i = \text{“a } i\text{-ésima letra do texto é uma vogal”},$$

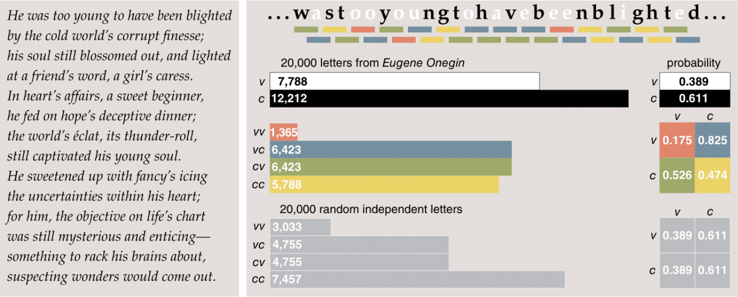
para todo $i \in \mathbb{N}$. Então:

$$P(V_1) = \frac{\#\text{ de vogais contadas}}{20.000}$$

enquanto,

$$P(V_1 \cap V_2) = \frac{\#\text{ pares de sucessivas vogais contadas}}{19.999}.$$

Exemplo de Hayes ...



Fonte: First links in the Markov chain (2013). B. Hayes. American Scientist **101**, *92-97 (https://www.americanscientist.org/article/first-links-in-the-markov-chain).*

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Cadeia de Markov de vogais e consoantes

Motivados com o trabalho de Markov, vamos considerar um texto aleatório. Considere os eventos

$$V_i = \text{“a } i\text{-ésima letra do texto é uma vogal”},$$

para todo $i \in \mathbb{N}$, e tais que

$$P(\underset{\text{futuro}}{V_{n+1}}|\underbrace{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}_{\text{pasado}} \cap \underset{\text{presente}}{A_n}) = P(V_{n+1}|A_n),$$

para todo $n \geq 0$ com $A_i = V_i$ ou $A_i = V_i^c$. Dado que a primeira letra é uma consoante, usando as probabilidades de Hayes, determine a probabilidade de que a terceira letra seja uma vogal.

Solução: Queremos encontrar $P(V_3|V_1^c)$, mas

$$
\begin{aligned}
P(V_3|V_1^c) &= P(V_3|V_2 \cap V_1^c)P(V_2|V_1^c) + P(V_3|V_2^c \cap V_1^c)P(V_2^c|V_1^c) \\
&= P(V_3|V_2)P(V_2|V_1^c) + P(V_3|V_2^c)P(V_2^c|V_1^c) \\
&= 0,175 \cdot 0,526 + 0,526 \cdot 0,474 \\
&= 0,341
\end{aligned}
$$

propriedade Markoviana

Resumindo

Markov pensou o poema como um processo aleatório para estuda-lo.

Se bem seu trabalho não aportou muito ao entendimento do poema de Pushkin, seus métodos deram origem à teoria das cadeias de Markov!

Observação

As cadeias de Markov são usadas hoje para modelagem de fenômenos que evoluem ao longo do tempo: crescimento de populações; propagação de epidemias; filas de clientes em um sistema; entre muitos, muitos outros!

O problema de Pascal (1656)

Proposto por Pascal a Fermat en 1656 (versão de Huygens en 1657):

Problema da ruína do jogador. Dois jogadores, A e B, apostam aos sucessivos lançamentos independentes de uma moeda, com probabilidade p de dar cara, $p \in (0, 1)$. Após cada lançamento A ganha $R\$1,00$ de B se der cara, ou B ganha $R\$1,00$ de A se der coroa. Supondo que há em jogo n reais, A inicia com i e B inicia com $n - i$:

qual é a probabilidade de A vencer o jogo?

Ver: Pascal's Problem: The "Gambler's Ruin" (1983). A.W.F. Edwards. International Statistical Review **51** *(1), pp. 73-79.*

A solução

Vamos verificar que esta probabilidade é dada por:

$$p_i = \begin{cases} \dfrac{1 - (\{1-p\}/p)^i}{1 - (\{1-p\}/p)^n}, & \text{si } p \neq 1/2, \\ i/n, & \text{si } p = 1/2, \end{cases}$$

para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Solução do problema da ruína do jogador: Considere os evento

$$A_i = \text{“o jogador } A \text{ vence o jogo sendo que inicia com } i \text{ reais”};$$

e defina $p_i := P(A_i)$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Note que $p_0 = 0$ e que $p_n = 1$.

Além disto, para $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ vale que

$$p_i = p\, p_{i+1} + q\, p_{i-1},$$

onde usamos $q := 1 - p$. Logo:

$$p_{i+1} - p_i = \left(\frac{q}{p}\right)(p_i - p_{i-1}).$$

... continuação: Conseguimos

$$p_{i+1} - p_i = \left(\frac{q}{p}\right)^2 (p_{i-1} - p_{i-2}) = \cdots = \left(\frac{q}{p}\right)^i (p_1 - p_0)\,,$$

e como $p_0 = 0$, então para $i \in \{1, \ldots, n-1\}$

$$p_{i+1} = p_i + \left(\frac{q}{p}\right)^i p_1,$$

e assim

$$p_{i+1} = \sum_{k=0}^{i} \left(\frac{q}{p}\right)^k p_1 = \begin{cases} \left(\dfrac{1-(q/p)^{i+1}}{1-q/p}\right) p_1, & \text{se } q \neq p, \\ (i+1)p_1, & \text{se } q = p. \end{cases}$$

O resultado segue após encontrar p_1 a partir de $p_n = 1$.

e se $n \to \infty$

Fazendo $n \to \infty$ (oponente rico!):

$$p_i = \begin{cases} 1 - (\{1-p\}/p)^i, & \text{si } p > 1/2, \\ 0, & \text{si } p \leq 1/2. \end{cases}$$

Isto é, A tem uma probabilidade positiva de vencer o jogo se, e somente se, $p > 1/2$.

Bom estudo!