Lista de exercícios 13
PGE950 - Probabilidade | PPGE - UFPE
Prof. Pablo M. Rodriguez
1° Semestre de 2020

Exercícios:

1. Seja X uma variável aleatória com função de distribuição F. Prove que

$$E(X^k) = k \left\{ \int_0^\infty \{1 - F(x)\}\, x^{k-1}\, dx - \int_{-\infty}^0 F(x)\, x^{k-1}\, dx \right\}, \text{ para } k \in \mathbb{N}.$$

2. Prove que uma variável aleatória X é integrável se, e somente se, $E(|X|) < \infty$.

3. Sejam X e Y variáveis aleatórias tais que $|X| \leq Y$ e Y é integrável. Prove que X é integrável.

4. (Desigualdade de Jensen) Mostre que se X é uma variável aleatória integrável e φ é uma função côncava definida em $\mathbb{R}$ então $E(\varphi(X)) \leq \varphi(E(X))$.

5. Demonstre as desigualdades clássica de Tchebychev e de Markov.

6. Encontre um exemplo de variáveis aleatórias X, Y tais que $E(XY) = E(X)E(Y)$ mas não sejam independentes.

7. Se X e Y são variáveis aleatórias integráveis, mostre que $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

8. Supondo que todas as variáveis aleatórias envolvidas são integráveis, mostre que:

   (a) $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$.

   (b) $Cov(X, X) = Var(X)$.

   (c) $Cov(aX, Y) = a\, Cov(X, Y)$.

   (d) $Cov\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^m Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m Cov(X_i, Y_j)$.

9. Seja $\rho(X, Y)$ o coeficiente de correlação das variáveis aleatórias X e Y. Mostre que $\rho(X, Y) = -1$ se, e somente se, $Y = aX + b$, para $a < 0$ e $b \in \mathbb{R}$.

10. **Exercícios adicionais:** 14, 18, 19, 24, 29, 34 do livro de Barry James (pág. 142 a 145 da edição de 2013).

ENTREGAR

os exercícios $3, 5, 8$ *e do* 10 *(exercícios 18 e 34) por e-mail ou por WhatsApp, escrito à mão, até o dia 09/09.*