

Aula 13: Distribuição de funções de vetores aleatórios

Disciplina: PGE950 - Probabilidade
Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE

Prof. Pablo M. Rodriguez
<http://www.pablo-rodriguez.org>



UNIVERSIDADE
FEDERAL
DE PERNAMBUCO

CCEN

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
E DA NATUREZA

Conteúdo desta aula

- ▶ Distribuição de funções de vetores aleatórios.
- ▶ Distribuição conjunta de funções de vetores aleatórios.
- ▶ Método do Jacobiano.



Perguntas de interesse

Dadas variáveis aleatórias X_1, X_2, \dots, X_n e uma função $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, qual a distribuição de

$$Y := g(X_1, \dots, X_n)?$$

E dada uma segunda função $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, e a variável

$$Z := h(X_1, \dots, X_n),$$

qual a distribuição conjunta de Y e Z ?



- ▶ No que segue vamos considerar funções nas que sempre vale

$$g^{-1}(B) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : g(x_1, \dots, x_n) \in B\} \in \mathcal{B}^n,$$

para todo $B \in \mathcal{B}$ (i.e., funções mensuráveis com relação a \mathcal{B}).

- ▶ Isto garante que

$$Y := g(X_1, \dots, X_n),$$

é uma variável aleatória.

Observação!

Note que $F_Y(a) = P(g(X_1, \dots, X_n) \leq a) = P((X_1, \dots, X_n) \in g^{-1}((-\infty, a]))$.



Exemplo 13.1

Se $X \sim U[0, 1]$ então $Y = -\log X \sim \text{Exp}(1)$. De fato, note que

$$X \in (0, 1) \text{ se, e somente se, } Y \in (0, \infty),$$

em que $P(X \in (0, 1)) = 1$. Então, dado $a \in (0, \infty)$ temos que

$$F_Y(a) = P(Y \leq a) = P(-\log X \leq a) = P(X \geq e^{-a}) = 1 - e^{-a}.$$

Como $F_Y(a) = 0$ se $a \in (0, \infty]$ concluímos o resultado.



Exemplo 13.2

Sejam $X \sim \text{Exp}(\lambda_1)$ e $Y \sim \text{Exp}(\lambda_2)$ independentes. A densidade da variável aleatória

$$U = \frac{X}{Y},$$

pode ser determinada notando que, para $a > 0$ (se $a \leq 0$ então $P(U \leq a) = 0$):

$$\begin{aligned} F_U(a) &= P(X \leq aY) \\ &= \int_0^\infty \int_0^{ay} (\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}) (\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}) dx dy \\ &= \int_0^\infty \left[(\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}) \int_0^{ay} (\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}) dx \right] dy \\ &= \int_0^\infty [(\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}) F_X(ay)] dy \end{aligned}$$



... continuação do Exemplo 13.2. Como $F_X(ay) = 1 - e^{-\lambda_1 ay}$, temos

$$\begin{aligned} F_U(a) &= \int_0^{\infty} [(\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}) (1 - e^{-\lambda_1 ay})] dy, \\ &= \underbrace{\int_0^{\infty} (\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}) dy}_{=1} - \underbrace{\int_0^{\infty} (\lambda_2 e^{-(\lambda_1 a + \lambda_2)y}) dy}_{=\lambda_2 / (\lambda_1 a + \lambda_2)}. \end{aligned}$$

Então $F_U(a) = 1 - \frac{\lambda_2}{(\lambda_1 a + \lambda_2)}$ e portanto

$$f_U(a) = \begin{cases} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 a + \lambda_2)^2}, & \text{se } a > 0, \\ 0, & \text{se } a \geq 0. \end{cases}$$



Proposição 13.1

Se X e Y têm densidade conjunta $f(x, y)$, então

$$f_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(a-t, t) dt.$$

Demonstração. Como $F_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{a-y} f(x, y) dx dy$, fazendo $s = x + y$ e $t = y$ temos

$$F_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^a f(s-t, t) ds dt = \int_{-\infty}^a \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(s-t, t) dt \right\} ds,$$

e portanto $f_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(a-t, t) dt.$



Proposição 13.2

Se X_1, X_2, \dots, X_n são independentes, então as variáveis aleatórias $g_1(X_1), g_2(X_2), \dots, g_n(X_n)$ também são independentes.

Demonstração. Seja $Y_i = g_i(X_i)$, para $i \in \{1, \dots, n\}$, então

$$\begin{aligned} F_{Y_1, \dots, Y_n}(a_1, \dots, a_n) &= P(g_1(X_1) \leq a_1, \dots, g_n(X_n) \leq a_n) \\ &= P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \in g_i^{-1}(-\infty, a_i]\}\right) \\ &= \prod_{i=1}^n P(X_i \in g_i^{-1}(-\infty, a_i]) \\ &= \prod_{i=1}^n P(g_i(X_i) \leq a_i) \\ &= \prod_{i=1}^n F_{X_i}(a_i) \end{aligned}$$

Observação!

Vale para funções de famílias disjuntas das X_i 's



Exemplo 13.3

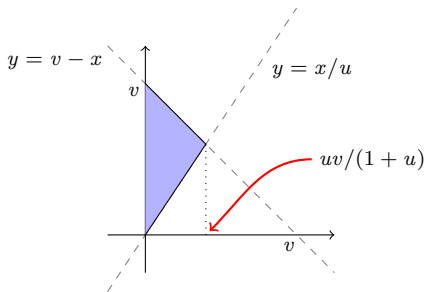
Sejam $X \sim \text{Exp}(1)$ e $Y \sim \text{Exp}(1)$ independentes. Podemos provar que

$$U = \frac{X}{Y}, \text{ e } V = X + Y,$$

são independentes e encontrar as suas distribuições. Se $u > 0$ e $v > 0$

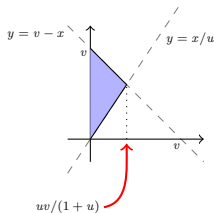
$$F_{U,V}(u, v) = P(U \leq u, V \leq v) = P((X, Y) \in \mathcal{C}_{u,v}),$$

onde $\mathcal{C}_{u,v} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x \leq uy, x + y \leq v\}$:



... continuação do Exemplo 13.3. Então,

$$F_{U,V}(u, v) = P((X, Y) \in \mathcal{C}_{u,v})$$

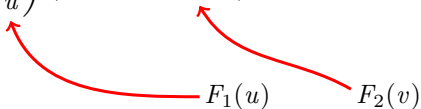


$$= \iint_{\mathcal{C}_{u,v}} f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

$$= \int_0^{uv/(1+u)} \int_{x/u}^{v-x} e^{-(x+y)} dy dx$$

$$= \int_0^{uv/(1+u)} \left(e^{-x(1+u)/u} - e^{-v} \right) dx$$

$$= \left(\frac{u}{1+u} \right) (1 - e^{-v} - ve^{-v}).$$



... continuação do Exemplo 13.3. Isto é, conseguimos escrever

$$F_{U,V}(u, v) = F_1(u)F_2(v),$$

para $u > 0$ e $v > 0$. Se $u \leq 0$ ou $v \leq 0$ temos que $F_{U,V}(u, v) = 0$.
Como

$$\lim_{u \rightarrow \infty} F_1(u) = 1, \text{ e que } \lim_{v \rightarrow \infty} F_2(v) = 1,$$

concluimos que U e V são independentes e as suas distribuições são:

$$F_U(u) = \begin{cases} \frac{u}{1+u}, & \text{se } u > 0, \\ 0, & \text{se } u \leq 0 \end{cases}$$

e

$$F_V(v) = \begin{cases} 1 - e^{-v} - ve^{-v}, & \text{se } v > 0, \\ 0, & \text{se } v \leq 0. \end{cases}$$



No exemplo anterior usamos o seguinte resultado:

Proposição 13.3

Dadas n variáveis aleatórias X_1, \dots, X_n , se existem funções F_1, \dots, F_n tais que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_i(x) = 1, \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n\}$$

e

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F_i(x_i), \text{ para todo } (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

então X_1, \dots, X_n são independentes e $F_i = F_{X_i}$, para $i \in \{1, \dots, n\}$.

Demonstração. Ver Proposição 2.4 do livro de Barry James.



O método do Jacobiano

- ▶ Sejam \mathcal{A}_0 e \mathcal{A} duas regiões abertas de \mathbb{R}^n e $g : \mathcal{A}_0 \rightarrow \mathcal{A}$ bijetora tal que $g(x_1, \dots, x_n) = (g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_n(x_1, \dots, x_n))$. Existe $h = g^{-1}$ em \mathcal{A} tal que se $y_i := g_i(x_1, \dots, x_n)$, então

$$x_i = h_i(y_1, \dots, y_n), \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n\}.$$

- ▶ Para $i, j \in \{1, \dots, n\}$, as derivadas parciais

$$\frac{\partial h_i(y_1, \dots, y_n)}{\partial y_j}, \text{ existem e são contínuas em } \mathcal{A}$$

- ▶ O Jacobiano $J(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial y_n} \end{bmatrix} \neq 0.$



O método do Jacobiano

Então, para qualquer $A \subset \mathcal{A}_0$ temos que

$$\begin{aligned} \int \cdots \int_A f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n &= \\ &= \int \cdots \int_{g(A)} f(h_1(y_1, \dots, y_n), \dots, h_n(y_1, \dots, y_n)) |J(\mathbf{x}, \mathbf{y})| dy_1 \cdots dy_n, \end{aligned}$$

para qualquer função f integrável em $A \subset \mathcal{A}_0$.



O método do Jacobiano

Considere $g : \mathcal{A}_0 \rightarrow \mathcal{A}$ como antes e considere X_1, \dots, X_n variáveis aleatórias com densidade conjunta $f(x_1, \dots, x_n)$ tal que

$$P((X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{A}_0) = 1.$$

Se Y_1, \dots, Y_n são variáveis aleatórias tais que

$$Y_i = g_i(X_1, \dots, X_n), \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n\}$$

então

$$f_{Y_1, \dots, Y_n}(y_1, \dots, y_n) = f(h_1(y_1, \dots, y_n), \dots, h_n(y_1, \dots, y_n)) |J(\mathbf{x}, \mathbf{y})|$$

se $\mathbf{y} \in \mathcal{A}$, e $f_{Y_1, \dots, Y_n}(y_1, \dots, y_n) = 0$ se $\mathbf{y} \notin \mathcal{A}$.



Observação!

Quando $n = 1$ o método do Jacobiano reduz-se para

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y))|(g^{-1})'(y)|, & \text{se } y \in \mathcal{A}, \\ 0, & \text{se } y \notin \mathcal{A}. \end{cases}$$

Usando o método do Jacobiano para o Exemplo 13.1. Lembre que $X \sim U[0, 1]$ e que $Y = -\log X$. Então, $g : (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$ com

$$g(x) = -\log x, \quad g^{-1}(y) = e^{-y}, \quad (g^{-1})'(y) = -e^{-y}.$$

Como

$$f_X(g^{-1}(y))|(g^{-1})'(y)| = f_X(e^{-y})| -e^{-y}| = e^{-y}, \quad \text{se } y \in (0, \infty)$$

temos que $Y \sim \text{Exp}(1)$.



Exemplo 13.3 através do método do Jacobiano. Sejam $X \sim \text{Exp}(1)$ e $Y \sim \text{Exp}(1)$ independentes. Queremos verificar que

$$U = \frac{X}{Y}, \text{ e } V = X + Y,$$

são independentes e queremos encontrar as suas distribuições. Neste caso, $g : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty) \times (0, \infty)$ é tal que $g = (g_1, g_2)$ com

$$u = g_1(x, y) = \frac{x}{y} \quad \text{e} \quad v = g_2(x, y) = x + y.$$

Como

$$x = h_1(u, v) = \frac{uv}{1+u} \quad \text{e} \quad y = h_2(u, v) = \frac{v}{1+u},$$

temos que $J((x, y), (u, v)) = \frac{v}{(1+u)^2}$.



... continuação do Exemplo 13.3 (método do Jacobiano). Para $(u, v) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ temos

$$f_{U,V}(u, v) = f(h_1(u, v), h_2(u, v)) \frac{v}{(1+u)^2} = e^{-(h_1(u,v)+h_2(u,v))} \frac{v}{(1+u)^2}$$

(caso contrário $f_{U,V}(u, v) = 0$). Isto é,

$$f_{U,V}(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{(1+u)^2} \cdot ve^{-v}, & \text{se } u > 0, v > 0, \\ 0, & \text{se } u \leq 0, v \leq 0. \end{cases}$$

Portanto, U e V são independentes com densidades dadas por

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{1}{(1+u)^2}, & \text{se } u > 0, \\ 0, & \text{se } u \leq 0. \end{cases} \quad f_V(v) = \begin{cases} ve^{-v}, & \text{se } v > 0, \\ 0, & \text{se } v \leq 0. \end{cases}$$



Bom estudo!



UNIVERSIDADE
FEDERAL
DE PERNAMBUCO

CCEN

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
E DA NATUREZA