

Lista de exercícios 2 - Processos de Poisson
PGE977 - Tópicos Especiais em Processos Estocásticos | 2º Semestre de 2020
Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE
Prof. Pablo M. Rodriguez

1. O processo estocástico $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ é um processo de Poisson de parâmetro λ , com $\lambda > 0$, se satisfaz:

Definição 1:

- (a) $N(0) = 0$;
- (b) O processo tem incrementos independentes;
- (c) Para todo $s, t \geq 0$ temos que $N(t+s) - N(s) \sim Poisson(\lambda t)$.

ou

Definição 2:

- (a) $N(0) = 0$;
- (b) O processo tem incrementos independentes e estacionários;
- (c) $P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$;
- (d) $P(N(h) \geq 2) = o(h)$.

Na definição 2 usamos a notação $o(h)$ para representar qualquer função $f(h)$ tal que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0$. Mostre que as definições 1 e 2 são equivalentes.

2. Seja $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ um processo de Poisson de parâmetro 2. Calcule:

- (a) $E((N(2, 7))^2)$;
- (b) $P(N(2, 5) = 7, N(7, 10) = 2 \mid N(0, 10) = 10)$;
- (c) $E(N(2, 7)N(2, 9))$.

3. Considere um processo de Poisson bi-dimensional de parâmetro $\lambda = 3$. Calcule:

- (a) a probabilidade de que a bola $B(\mathbf{x}, 3/2)$ centrada no ponto $\mathbf{x} = (2, -3)$ e de rádio $3/2$ contenha exatamente 2 pontos;
- (b) a probabilidade de que exista pelo menos um ponto do processo na região Λ dada por:

$$\Lambda := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < x^2\};$$

- (c) a probabilidade de que existam pelo menos três pontos do processo na região Θ dada por:

$$\Theta := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 < x < 0, 0 < y < -4x\};$$

- (d) o número médio de pontos do processo contidos em $B(\mathbf{x}, 3/2) \cup \Lambda \cup \Theta$.