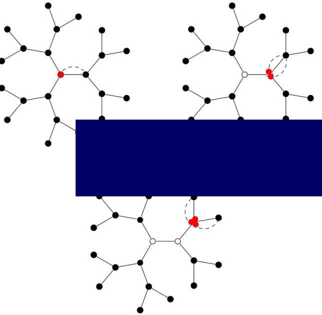
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE



PROBLEMAS DE PROBABILIDADE

Prof. Pablo M. Rodriguez

https://www.pablo-rodriguez.org/et581-probabilidade1

Universidade Federal de Pernambuco
CCEN
Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo da Aula 15

- Problemas de probabilidade.

Problema 1

Exercício 2.14 (Ross). Os dados a seguir foram obtidos com a pesquisa de um grupo de 1000 assinantes de uma revista: avaliando-se trabalho, estado civil e instrução, verificou-se que havia:

- 312 pessoas empregadas,
- 470 pessoas casadas,
- 525 pessoas formadas em universidades,
- 42 pessoas formadas em universidades e empregadas,
- 147 pessoas formadas em universidades e casadas,
- 86 pessoas com emprego e casadas, e
- 25 pessoas com emprego formadas em universidades e casadas.

Mostre que os números apontados por esse estudo estão incorretos.

Solução do Problema 1. Considere o experimento de escolher uma das pessoas do grupo, ao acaso, e defina os eventos:

- E = "a pessoa escolhida está empregada;"
- C = "a pessoa escolhida está casada;"
- U = "a pessoa é formada em universidade."

Note que, das informações do estudo temos que:

$$P(E) = 0,312; \;\; P(C) = 0,470; \;\; P(U) = 0,525;$$

$$P(U \cap E) = 0,042; \;\; P(U \cap C) = 0,147; \;\; P(E \cap C) = 0,086;$$

$$\text{e que } P(E \cap U \cap C) = 0,025.$$

. . . continuação: Assim, $P(E \cup U \cup C)$ é igual a

$$P(E) + P(U) + P(C) - P(E \cap U) - P(E \cap C) - P(U \cap C) + P(E \cap U \cap C)$$

0,312 0,525 0,470 0,042 0,086 0,147 0,025

Portanto:

$$P(E \cup U \cup C) = 1,057 > 1$$

o que não é possível. Logo os dados do estudo devem estar incorretos.

Problema 2

Exercício 2.16 (Ross). Pôquer com dados é jogado com o lançamento simultâneo de 5 dados. Mostre que:

a. $P(\text{nenhum dado de mesmo valor}) = 0,0926$;

b. $P(\text{um par}) = 0,4630$;

c. $P(\text{trinca}) = 0,1543$;

d. $P(\text{uma trinca e um par}) = 0,0386$;

e. $P(\text{cinco dados iguais}) = 0,0008$.

Solução do Problema 2. Neste problema, o espaço amostral pode ser escrito como:

$$\Omega = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) : a_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ para cada } i\}.$$

Note que $|\Omega| = 6^5$ e que os resultados simples são equiprováveis.

a. Denote os dados por d_1, d_1, d_3, d_4 e d_5 e note que, para que nenhum dado resulte no mesmo valor temos:

$$\underset{d_1}{\underline{\;6\;}} \quad \underset{d_2}{\underline{\;5\;}} \quad \underset{d_3}{\underline{\;4\;}} \quad \underset{d_4}{\underline{\;3\;}} \quad \underset{d_5}{\underline{\;2\;}}$$

resultados possíveis. Logo:

$$P(\text{todos} \neq) = \frac{\#\text{ casos favoráveis}}{\#\text{ casos possíveis}} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{6^5} = 0,0926.$$

... continuação: b. Um par resulta quando são obtidos dois dados com o mesmo valor e todos os outros diferentes entre si, e diferentes ao par de dados mencionado. Por exemplo, o resultado:

$$(6, 2, 3, 6, 1)$$

é um par. Neste caso, temos

$$\binom{5}{2}$$

formas de "escolher" os dados que terão o mesmo valor, sendo que para cada uma delas há 6 formas de ter tal valor e, para cada valor destes, há $5 \times 4 \times 3$ resultados possíveis para os três dados restantes. Isto é:

$$P(\text{um par}) = \frac{\binom{5}{2} \times 6 \times (5 \times 4 \times 3)}{6^5} = 0,4630.$$

... continuação: c. Uma trinca resulta quando são obtidos três dados com o mesmo valor e os outros dois dados com valores diferentes entre si, e diferentes ao valor comum dos outros três dados. Por exemplo, o resultado:

$$(5, 2, 5, 5, 1)$$

é uma trinca. Neste caso, temos

$$P(\text{uma trinca}) = \frac{\binom{5}{3} \times 6 \times (5 \times 4)}{6^5} = 0,1543.$$

Razonando análogamente, obtemos:

d. $P(\text{uma trinca e um par}) = \dfrac{\binom{5}{3} \times 6 \times 5}{6^5} = 0,0386.$

e. $P(\text{todos iguais}) = \dfrac{6}{6^5} = 0,0008.$

Problema 3

Exercício 2.23 (Ross). Rola-se um par de dados honestos. Qual é a probabilidade de o segundo dado sair com um valor maior do que o primeiro?

Solução. Se A é o evento "o segundo dado mostra um valor maior do que o primeiro", então:

Ω	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

A

$$P(A) = \frac{15}{36} \approx 0,4167$$

Outra solução do Problema 3. Considere os eventos

$$D(i,j) = \text{“o dado } i \text{ resulta em } j''$$

para $i = 1$ e $i = 2$ e para $j \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Note que:

$$P(A) = \sum_{j=1}^{6} P(A|D(2,j))P(D(2,j)).$$

Como

$$P(D(2,j)) = P(\text{o segundo dado resulta em } j) = \frac{1}{6}$$

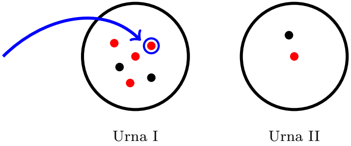
para todo $j \in \{1,2,3,4,5,6\}$, e como (explique!)

$$P(A|D(2,1)) = 0, \quad P(A|D(2,2)) = 1/6, \quad P(A|D(2,3)) = 2/6,$$
$$P(A|D(2,4)) = 3/6, \quad P(A|D(2,5)) = 4/6, \quad P(A|D(2,6)) = 5/6,$$

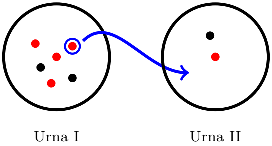
... então: $P(A) = \frac{1}{6} \times \left(\frac{1+2+3+4+5}{6}\right) = \frac{15}{35}$.

Problema 4: o experimento!

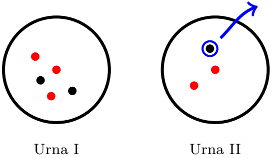
Paso 1: escolher
ao acaso uma bola
da Urna I



Paso 2: a bola
escolhida é colocada
na Urna II

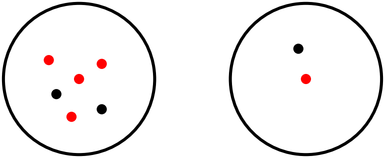


Paso 3: escolher
uma bola ao acaso
da Urna II



Problema 4

Exercício 3.23 (Ross). A urna I contém 2 bolas pretas e 4 bolas vermelhas, enquanto a urna II contém 1 bola preta e 1 bola vermelha.



Urna I

Urna II

Uma bola é aleatoriamente escolhida da urna I e colocada na urna II, e então uma bola é selecionada aleatoriamente da urna II. Qual é

a. a probabilidade de que a bola selecionada da urna II seja preta?

b. a probabilidade condicional de que a bola transferida seja preta dado que uma bola preta tenha sido selecionada da urna II?

Solução do Problema 4. Vamos considerar os seguintes eventos:

$$A_I = \text{“a bola escolhida da urna I é preta”},$$

$$A_{II} = \text{“a bola escolhida da urna II é preta”}.$$

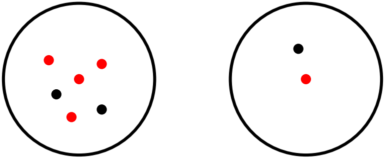
Note que queremos calcular:

a. $P(A_{II})$;

b. $P(A_I | A_{II})$.

. . . continuação: Mas, para (a) sabemos que

$$P(A_{II}) = P(A_{II}|A_I)P(A_I) + P(A_{II}|A_I^c)P(A_I^c).$$



Urna I   Urna II

Como $P(A_I) = 2/6 = 1/3$ então $P(A_I^c) = 2/3$. Por outro lado:

$$P(A_{II}|A_I) = \frac{2}{3}, \quad \text{enquanto que} \quad P(A_{II}|A_I^c) = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Assim,} \quad P(A_{II}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \approx 0,444.$$

... continuação: Para (b) lembre que:

$$P(A_I|A_{II}) = \frac{P(A_{II}|A_I)P(A_I)}{P(A_{II})} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{2}.$$

Problema 5

Exercício 3.37 (Ross). Uma jogadora tem uma moeda honesta e uma moeda com duas caras em seu bolso.

a. Ela seleciona uma das moedas aleatoriamente; quando ela a joga, ela dá cara. Qual é a probabilidade de esta moeda ser a honesta?

b. Suponha que ela jogue a mesma moeda uma segunda vez e, novamente, dê cara. Agora, qual é a probabilidade de esta moeda ser a honesta?

c. Suponha que ela jogue a mesma moeda uma terceira vez e que agora dê coroa. Agora, qual é a probabilidade de esta moeda ser a honesta?

Solução do Problema 5. Defina os eventos:

$$H = \text{“a moeda escolhida é a moeda honesta”},$$

$$C_i = \text{“o } i - \text{ésimo lançamento é cara”}.$$

Para $i \in \{1, 2, 3\}$. Note que queremos calcular:

a. $P(H|C_1)$;

b. $P(H|C_1 \cap C_2)$;

c. $P(H|C_1 \cap C_2 \cap C_3^c)$.

. . . continuação: Note que $P(H) = P(H^c) = \frac{1}{2}$, enquanto que:

$$P(C_1|H) = P(C_1^c|H) = \frac{1}{2}, \quad \text{e} \quad P(C_1|H^c) = 1, \; P(C_1^c|H^c) = 0.$$

Do Teorema de Bayes:

$$P(H|C_1) = \frac{P(C_1|H)P(H)}{P(C_1|H)P(H) + P(C_1|H^c)P(H^c)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2}}$$

e portanto $P(H|C_1) = 1/3$. Isto resolve (a).

... continuação: (b) Novamente Bayes implica que:

$$P(H|C_1 \cap C_2) = \frac{\overbrace{P(C_1 \cap C_2|H)}^{1/4}\,\overbrace{P(H)}^{1/2}}{\underbrace{P(C_1 \cap C_2|H)}_{1/4}\,\underbrace{P(H)}_{1/2} + \underbrace{P(C_1 \cap C_2|H^c)}_{1}\,\underbrace{P(H^c)}_{1/2}}$$

... e portanto $P(H|C_1 \cap C_2) = 1/5$.

Já a resposta do item (c) é $P(H|C_1 \cap C_2 \cap C_3^c) = 1$ (Por quê?).

Problema 6

Suponha que lançamentos sucessivos e independentes de um dado honesto são realizados. Calcule a probabilidade de que um 3 seja observado antes do que um número par.

Solução. Defina os eventos:

$$A = \text{“ver um 3 antes do que um par”};$$

$$A_1 = \text{“um 3 é observado no primeiro lançamento”};$$

$$B_1 = \text{“um número par é observado no primeiro lançamento”};$$

e note que $P(A_1) = 1/6$ e $P(B_1) = 1/2$.

... continuação: Então:

$$P(A) = P(A|A_1)P(A_1) + P(A|B_1)P(B_1) + P(A|\{A_1 \cup B_1\}^c)P(\{A_1 \cup B_1\}^c))$$

mas

$$\begin{aligned} P(A|A_1) &= 1; \\ P(A|B_1) &= 0; \\ P(A|\{A_1 \cup B_1\}^c) &= P(A). \end{aligned}$$

Como $P(\{A_1 \cup B_1\}^c)) = 1 - P(A_1 \cup B_1)) = 1 - 4/6 = 1/3$ temos que:

$$P(A) = \frac{1}{6} + P(A)\frac{1}{3}$$

isto é: $P(A) = \dfrac{1/6}{2/3} = 1/4.$

Observação

Note que $P(\text{sair um 3 antes do que um par}) = \dfrac{P(\text{sair um 3})}{P(\text{sair um 3}) + P(\text{sair um par})}$.

Em geral

Suponha que A e B sejam eventos mutuamente exclusivos de um experimento. Se tentativas independentes desse experimento forem realizadas, então A ocorrerá antes de B com probabilidade:

$$\frac{P(A)}{P(A) + P(B).}$$

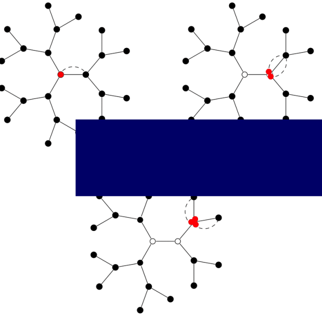
Referência!

Ross, S. Probabilidade: Um curso moderno com aplicações, 8a ed., Bookman, 2010.

Exercícios:

- Capítulo 2 (Ross):
  - 2.13, 2.17, 2.21, 2.24, 2.32, 2.33, 2.41 (pág. 72 a 75).
- Capítulo 3 (Ross):
  - 3.5, 3.14, 3.16, 3.17, 3.32, 3.33, 3.43, 3.45, 3.66 (pág. 132 a 139).

Lembrete. Lista Prova 2: Escolher 4 exercícios, dos indicados acima, sendo ao menos dois do Cap. 3, e entregar sua resolução justificada de forma clara até o dia 04/08 às 18h00 por e-mail ou Whatsapp.



Bom estudo!