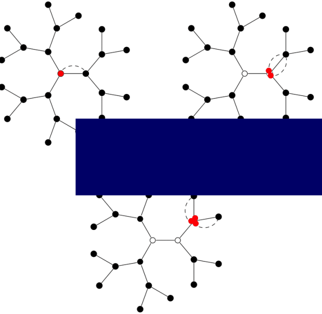
PGE966 - Processos Estocásticos

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE



REVISÃO DE PROBABILIDADE

Prof. Pablo M. Rodriguez
https://www.pablo-rodriguez.org

Universidade Federal de Pernambuco
CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo

- Variáveis aleatórias discretas.
- Esperança matemática.
- Esperança condicional.

Tipos de variáveis aleatórias

Uma variável aleatória X é:

- discreta se $X(\omega) \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ para todo $\omega \in \Omega$, para algum conjunto $\mathcal{S}$ finito ou enumerável. Neste caso

$$p(i) := P(X = i), i \in \mathcal{S},$$

  é a função de probabilidade de X.

- (absolutamente) contínua se existe $f(x) \geq 0$ tal que

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

  Neste caso f é a função densidade de probabilidade de X.

Exemplo 1.1

Problema da coleção de cupons. *Existem n tipos de cupons e cada vez que um colecionador pega um cupom, este tem, independentemente das seleções anteriores, a mesma probabilidade de ser de qualquer um dos n tipos. Seja X o número de cupons que precisam ser recolhidos até obter uma coleção completa de pelo menos um cupom de cada tipo. Vamos encontrar $P(X = k)$.*

- *Note que*

$$\{X > k - 1\} = \{X = k\} \cup \{X > k\},$$

então

$$P(X = k) = P(X > k - 1) - P(X > k).$$

... continuação do Exemplo 1.1. Para encontrar $P(X > k)$, fixe k e considere os eventos:

$A_j =$ "nenhum cupom do tipo j está nos primeiros k cupons recolhidos",

para $j \in \{1, \ldots, n\}$. Note que

$$
\begin{aligned}
P(X > k) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) \\
&\quad + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).
\end{aligned}
$$

... continuação do Exemplo 1.1. Mas

$$P(A_j) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^k,$$

para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Da mesma forma,

$$P(A_i \cap A_j) = \left(\frac{n-2}{n}\right)^k,$$

para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ com $i \neq j$ e, em geral

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_\ell}) = \left(\frac{n-\ell}{n}\right)^k,$$

para $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_\ell \leq n$. Logo,

$$P(X > k) = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \left(\frac{n-i}{n}\right)^k (-1)^{i+1}.$$

Distribuição Bernoulli

X tem *distribuição de Bernoulli* com parâmetro $p \in (0,1)$ se:

$$p(1) = p = 1 - p(0).$$

Notação: $X \sim Bernoulli(p)$.

Observação!

Um experimento com apenas dois resultados possíveis, sucesso ou fracasso, chama-se ensaio de Bernoulli.

Exemplo 1.2

Seja X a variável aleatória indicadora do evento A com $P(A) = p$:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se } A \text{ ocorre}, \\ 0, & \text{se } A \text{ não ocorre}. \end{cases}$$

Então $X \sim Bernoulli(p)$.

Distribuição Binomial

X tem *distribuição Binomial* com parâmetros $n \in \mathbb{N}$ e $p \in (0,1)$ se:

$$p(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \text{ para } i \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Notação: $X \sim B(n,p)$.

Observação!

X pode ser interpretada como o número de sucessos obtidos quando n ensaios independentes de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p, são realizados.

Observação!

Duas variáveis aleatórias X_1 e X_2 são independentes se para todo $B_1 \in \mathcal{B}$ e $B_2 \in \mathcal{B}$, os eventos aleatórios $\{X_1 \in B_1\}$ e $\{X_2 \in B_2\}$ são independentes.

Note que, para $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, por exemplo a configuração

$$\sigma : \ \underset{1}{\underline{\checkmark}} \ \underset{2}{\underline{\times}} \ \underset{3}{\underline{\checkmark}} \ \underset{4}{\underline{\times}} \ \underset{5}{\underline{\checkmark}} \ \cdots\cdots \ \underset{n-3}{\underline{\times}} \ \underset{n-2}{\underline{\checkmark}} \ \underset{n-1}{\underline{\times}} \ \underset{n}{\underline{\checkmark}}$$

i sucessos ($\checkmark$)

$n - i$ fracassos ($\times$)

é favorável para a ocorrência de $\{X = i\}$. Como temos $\binom{n}{i}$ formas diferentes de obter uma configuração destas e como

$$P(\sigma) = p^i (1-p)^{n-i},$$ por independência!

concluímos que

$$P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}.$$

Se $X \sim B(n, p)$ podemos escrever

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

em que $X_1, \ldots, X_n$ são i.i.d. com $X_1 \sim Bernoulli(p)$.

Observação!

A notação i.i.d. é usada para dizer que as variáveis são independentes e identicamente distribuídas.

Distribuição de Poisson

X tem *distribuição de Poisson* com parâmetro $\lambda \in (0, \infty)$ se:

$$p(i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}, \text{ para } i \in \{0, 1, \ldots\}.$$

Notação: $X \sim Poisson(\lambda)$.

Observação!

X pode ser interpretada como uma aproximação para o número de sucessos obtidos quando n ensaios independentes de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p, são realizados, assumindo valores grandes de n e pequenos de p.

Aproximação da Binomial para a Poisson

Seja $X \sim B(n,p)$, n grande, e seja $Y \sim Poisson(\lambda)$ com $\lambda = np$.

$$P(X=i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \frac{n!}{(n-i)!i!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^i \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-i}$$

que podemos reescrever:

$$P(X=i) = \left\{\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-\{i-1\})}{n^i}\right\}\left(\frac{\lambda^i}{i!}\right)\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^i}.$$

Aproximação da Binomial para a Poisson

Como

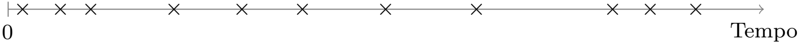
$$1 - \frac{j}{n} \approx 1, \ \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \approx e^{-\lambda}, \ \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^i \approx 1,$$

concluimos que

$$P(X = i) \approx \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} = P(Y = i).$$

Processo de Poisson de parâmetro λ

Um Processo de Poisson de parâmetro λ unidimensional pode ser representado como uma sequência de pontos ou marcas em $\mathbb{R}^+$:



tais que, se

$$N(B) = \text{número de pontos contidos no intervalo } B \subset \mathbb{R}^+, \text{ então:}$$

- $N(B) \sim Poisson(\lambda|B|)$;
- $B_1, B_2 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, então

  … $N(B_1)$ e $N(B_2)$ são independentes.

Distribuição Geométrica

X tem *distribuição geométrica* com parâmetro $p \in (0,1)$ se:

$$p(i) = p(1-p)^{i-1}, \text{ para } i \in \mathbb{N}.$$

Notação: $X \sim Geom(p)$.

Observação!

X pode ser interpretada como o número de ensaios independentes de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p, que devem ser realizados até obter o primeiro sucesso.

Pensando na interpretação de X, note que se

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se o } i\text{-ésimo ensaio resulta em sucesso,} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para todo $i \in \mathbb{N}$, então:

$$P(X = i) = P\left(\left\{\bigcap_{k=1}^{i-1} \{X_k = 0\}\right\} \cap \{X_i = 1\}\right) = (1-p)^{i-1} p.$$

por independência!

Problema da coleção de cupons

Se X é o número de cupons que precisam ser recolhidos até obter uma coleção completa de pelo menos um cupom de cada tipo, então:

$$X = \sum_{i=1}^{n} T_i,$$

em que $T_1, T_2, \ldots, T_n$ são variáveis aleatórias independentes com

$$T_i \sim Geom\left(\frac{n-i+1}{n}\right),$$

para $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Independência

X e Y são independentes se, para quaisquer $A, B \subset \mathcal{B}$, vale que

$$P\left(X \in A, Y \in B\right) = P(X \in A)P(Y \in B).$$

Isto é, X e Y são independentes se para quaisquer $A, B \subset \mathcal{B}$ os eventos

$$\mathcal{E}_A := \{X \in A\}$$

e

$$\mathcal{E}_B := \{Y \in B\}$$

são independentes.

Independência

X e Y são independentes se, e somente se,

- $F(a, b) = F_X(a) \cdot F_Y(b)$, para todo a, b;
- $p(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$ para todo x, y (caso discreto);
- $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ para todo x, y (caso continuo).

Critério de independência

Proposição 1.1

X e Y são independentes se, e somente se, existirem funções h e g, definidas nos reais, tais que

$$f(x, y) = h(x) \cdot g(y), \quad x, y \in \mathbb{R}, \qquad (se\ X\ e\ Y\ são\ continuas),$$

ou

$$p(x, y) = h(x) \cdot g(y), \quad x, y \in \mathbb{R}, \qquad (se\ X\ e\ Y\ são\ discretas).$$

Em geral

Em geral, dadas $X_1, X_2, \ldots, X_n$, variáveis aleatórias discretas, a função de probabilidades conjunta é dada por

$$p(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) := P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3, \ldots, X_n = x_n),$$

e a função de probabilidade marginal de X_i, para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, é obtida fazendo

$$p_{X_i}(x_i) := P(X_i = x_i) = \underbrace{\sum_{x_1} \sum_{x_2} \cdots \sum_{x_n}}_{x_j : j \neq i} p(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$$

Esperança de uma v.a. discreta

A esperança de uma v.a. discreta X, com valores em $\mathcal{S}$ e função de probabilidade $p(x)$, é dada por

$$E(X) := \sum_{x \in \mathcal{S}} x\, p(x) = \sum_{x \in \mathcal{S} : x < 0} x\, p(x) + \sum_{x \in \mathcal{S} : x \geq 0} x\, p(x),$$

... desde que pelo menos uma das somas seja finita. Caso contrário, dizemos que a esperança de X não existe.

Observação!

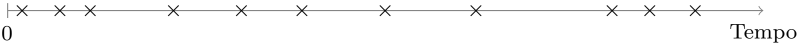
Note que ambas as somas são finitas se $\sum_{x \in \mathcal{S}} |x|\, p(x) < \infty$.

- Se $X \sim Poisson(\lambda)$ então

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n \left\{ e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \right\} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda.$$

Observação!

Considere um Processo de Poisson de parâmetro λ:



Qual o papel de λ?

Lembre que $N(a, b) \sim Poisson(\lambda(b - a))$.

Exemplo 1.3

Seja X uma variável aleatória discreta com valores em $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tal que

$$p(i) = \frac{C}{i^2}, \quad i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad com\ C = \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \right\}^{-1}.$$

Então $E(X)$ não existe pois:

$$-\sum_{i \in \mathbb{Z}_-} i\, p(i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}_+} i\, p(i) = C \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$$

Propriedades

Observação!

No que segue, consideramos variáveis aleatórias tais que sua esperança existe.

1. Se $X = c$ então $E(X) = c$.
2. Se $X \leq Y$ então $E(X) \leq E(Y)$.
3. **Linearidade.**

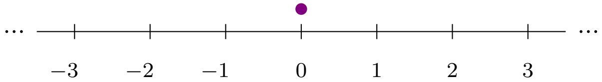
$$E(c\,X + Y) = c\,E(X) + E(Y),$$

se c é uma constante, quando os termos à direita tem sentido.

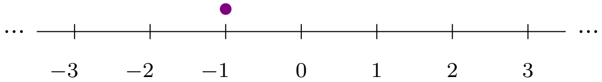
Em geral, se $X_1, \ldots, X_n$ são v.a. e $c_1, \ldots, c_n$ são constantes, então:

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i E(X_i).$$

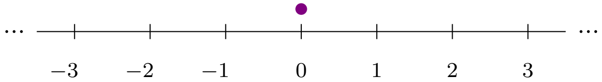
O passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



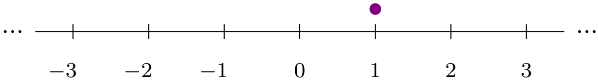
O passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



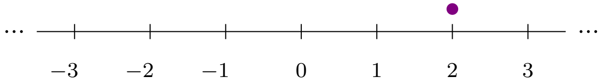
O passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



O passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



O passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



O passeio aleatório em $\mathbb{Z}$

Exemplo 1.4

A cada passo, independentemente, a partícula pula à direita com probabilidade p, ou à esquerda com probabilidade $1-p$. Definimos:

$$Y_n = \text{ posição da partícula logo após o } n-\text{ésimo salto},$$

para $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, e supomos que $Y_0 = 0$. Podemos escrever

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

onde $X_1, X_2, \ldots$ são v.a. i.i.d. tais que

$$P(X_i = 1) = p = 1 - P(X_i = -1).$$

... continuação do Exemplo 1.4. Note que

$$E(Y_n) = E(X_1 + X_2 + \cdots X_n) = n\, E(X_1) = n\,(2p - 1).$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} E(Y_n) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } p > 1/2; \\ 0, & \text{se } p = 1/2; \\ -\infty, & \text{se } p < 1/2. \end{cases}$$

Soma de variáveis aleatórias indicadoras e esperança

Proposição 1.2

Se $A_1, \ldots, A_n$ são eventos aleatórios, então $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Prova. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ seja

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se o evento } A_i \text{ ocorrer,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Então

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{1}$$

... continuação da prova da Prop.1.2. Por outro lado, se

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{se } X \geq 1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

então $P(X \geq Y) = 1$ e portanto

$$E(X) \geq E(Y). \tag{2}$$

Mas

$$E(Y) = P(Y = 1) = P(X \geq 1) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right). \tag{3}$$

De (1), (2) e (3) obtemos o resultado.

Esperança condicional

Se X e Y são variáveis aleatórias em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, a esperança condicional de X dado que $Y = y$, que denota-se como:

$$E(X|\,Y = y)$$

é a esperança da distribuição condicional de X dado que $Y = y$, se esta esperança existir.

- Se X é discreta:

$$E(X|\,Y = y) = \sum_{x} x\, P(X = x|\,Y = y).$$

Caso de variáveis aleatórias discretas

Exemplo 1.5

Sejam $X \sim B(n, p)$ *e* $Y \sim B(n, p)$ *independentes. Vamos encontrar*

$$E(X|X + Y = m).$$

Dado que $X + Y = m$, X *toma valores em* $\{0, 1, \dots, \min\{n, m\}\}$ *e*

$$P(X = k|X+Y = m) = \frac{P(X = k, X + Y = m)}{P(X + Y = m)} = \frac{P(X = k, Y = m - k)}{P(X + Y = m)},$$

mas $X + Y \sim B(2n, p)$.

... continuação do Exemplo 1.5. Temos que

$$P(X = k|X+Y = m) = \frac{\left\{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\right\} \left\{\binom{n}{m-k} p^{m-k} (1-p)^{n-m+k}\right\}}{\binom{2n}{m} p^m (1-p)^{n-m}}$$

isto é:

$$P(X = k|X + Y = m) = \frac{\binom{n}{k}\binom{n}{m-k}}{\binom{2n}{m}},$$

para $k \in \{0, 1, \ldots, \min\{n, m\}\}$.

... continuação do Exemplo 1.5. A partir daqui temos duas opções:

- Calcular $E(X|X+Y=m) = \sum_k k\, P(X=k|X+Y=m)$,
- ou reconhecer que:

$$X|X+Y=m \sim H(m, 2n, n)$$

e portanto: $E(X|X+Y=m) = \dfrac{nm}{2n} = \dfrac{m}{2}$.

A esperança condicional como variável aleatória

Sejam X, Y duas variáveis aleatórias em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Se

$$\varphi(y) := E(X|Y = y)$$

então $\varphi(Y) = E(X|Y)$ é uma variável aleatória chamada esperança condicional de X dada Y.

Propriedade importante: $E(E(X|Y)) = E(X)$. Isto é, se Y é discreta:

$$E(X) = \sum_{y} E(X|Y = y)P(Y = y).$$

Propriedades da esperança condicional

Observação!

Na sequência Y é uma v.a. e X, X_1, X_2 são integráveis, todas em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

- Se $X = c$, com c uma constante, então $E(X|Y) = c$.
- Se $X_1 \leq X_2$ então $E(X_1|Y) \leq E(X_2|Y)$.
- **Linearidade.** $E(aX_1 + bX_2|Y) = aE(X_1|Y) + bE(X_2|Y)$.
- **Princípio da substituição.** Se $\varphi(X, Y)$ é integrável, então

$$E(\varphi(X, Y)|Y = y) = E(\varphi(X, y)|Y = y).$$

- Se X e Y são independentes então $E(X|Y) = E(X)$.

Esperança da soma de um # aleatório de variáveis aleatórias.

Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias $i.i.d$ e N uma variável aleatória discreta com valores em $\mathbb{N}$, independente às X_i's.

$$\text{Se } Y = \sum_{i=1}^{N} X_i \text{ então } E(Y) = E(X_1)E(N).$$

De fato, como

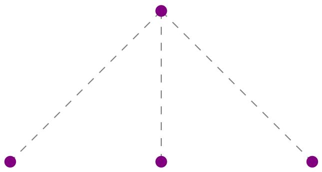
$$E(Y|N=n) = E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \middle| N=n\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \middle| N=n\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

temos $E(Y|N=n) = n\,E(X_1)$ e portanto $E(Y|N) = N\,E(X_1)$. Logo:

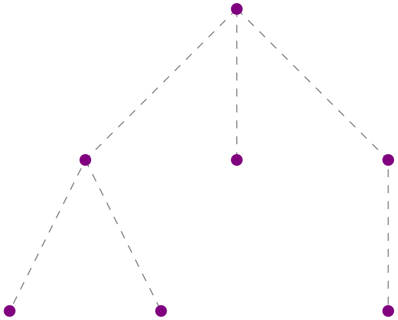
$$E(Y) = E(E(Y|N)) = E(NE(X_1)) = E(X_1)E(N).$$

Processo de ramificação

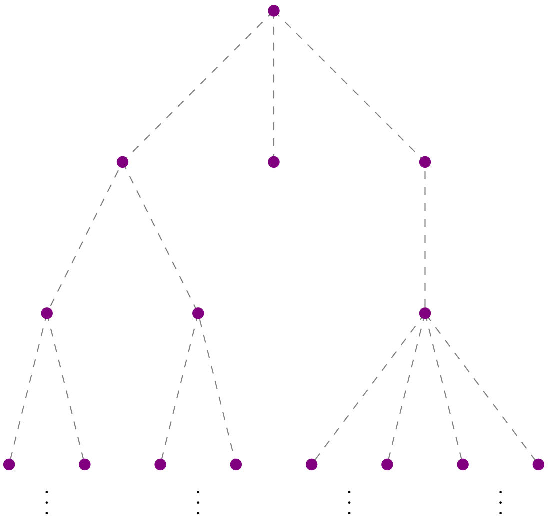
Processo de ramificação



Processo de ramificação

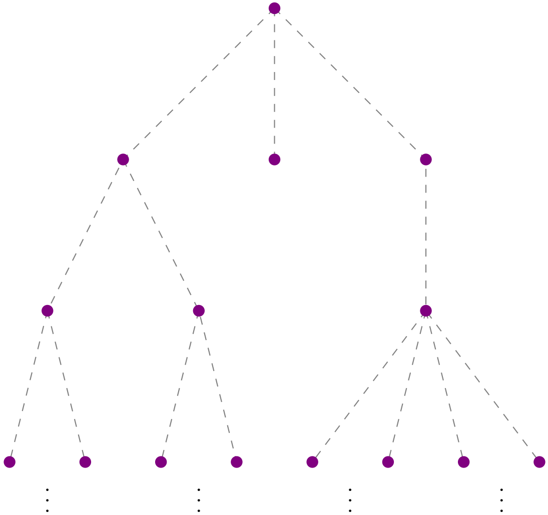


Processo de ramificação

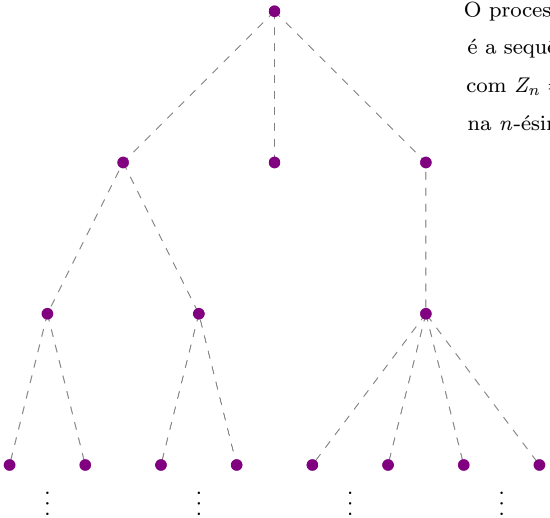


Pergunta: o processo continuara indefinidamente?

Processo de ramificação



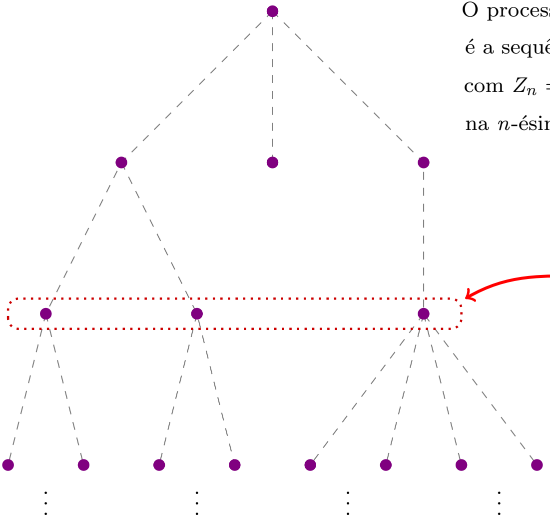
Processo de ramificação



O processo de ramificação é a sequência $(Z_n)_{n\geq 0}$, com $Z_n = \#$ de partículas na n-ésima geração.

Processo de ramificação

O processo de ramificação é a sequência $(Z_n)_{n\geq 0}$, com $Z_n = \#$ de partículas na n-ésima geracão.



Extinção do processo de ramificação

O evento $\mathcal{E} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}$ chama-se extinção do processo.

Vamos provar que $m := E(X) < 1 \Rightarrow P(\mathcal{E}) = 1$.

Extinção do processo de ramificação

Suponha que $m < 1$. Para todo $n \geq 1$ temos que

$$Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_i,$$

onde as X_i's são i.i.d. à variável aleatória X com $E(X) = m$. Então,

$$E(Z_n) = m\, E(Z_{n-1}),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, o que implica: $E(Z_n) = m^n$. Então,

$$P(\mathcal{E}^c) = P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \{Z_n \geq 1\}\right) = \lim_{n\to\infty} P(Z_n \geq 1) \leq \lim_{n\to\infty} E(Z_n) = 0$$

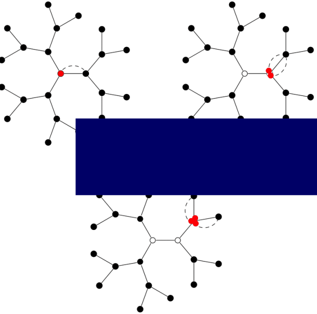
$m < 1$

$\{Z_n \geq 1\} \searrow$

$P(Z_n \geq 1) \leq E(Z_n)$

Referências para a revisão de probabilidade

- R. Schinazi. Classical and Spatial Stochastic Processes, Birkhäuser Boston, 1999. Ver também: Uma introdução aos processos estocásticos espaciais, IMPA, 1995.
- Sheldon M. Ross. Introduction to Probability Models. 10th ed. Academic Press. 2010.



Bom estudo!