Aula 20: Esperança condicional

Disciplina: PGE950 - Probabilidade

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE

Prof. Pablo M. Rodriguez

http://www.pablo-rodriguez.org

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo desta aula

- Esperança condicional.
- Propriedades e exemplos.

Esperança condicional

Se X e Y são variáveis aleatórias em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, a esperança condicional de X dado que $Y = y$, que denota-se como:

$$E(X|\,Y = y)$$

é a esperança da distribuição condicional de X dado que $Y = y$, se esta esperança existir.

- Se X é discreta:

$$E(X|\,Y = y) = \sum_x x\, p_{X\,|\,Y}(x|y).$$

- Se X é continua:

$$E(X|\,Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X\,|\,Y}(x|y).$$

Caso de variáveis aleatórias discretas

Observação!

X, Y *discretas* $\Rightarrow E(X|Y=y) = \sum_x x\, p_{X|Y}(x|y) = \sum_x x\, P(X=x|Y=y).$

Exemplo 20.1

Sejam $X \sim B(n,p)$ *e* $Y \sim B(n,p)$ *independentes. Vamos encontrar*

$$E(X|X+Y=m).$$

Dado que $X+Y=m$, X *toma valores em* $\{0,1,\ldots,\min\{n,m\}\}$ *e*

$$P(X=k|X+Y=m) = \frac{P(X=k, X+Y=m)}{P(X+Y=m)} = \frac{P(X=k, Y=m-k)}{P(X+Y=m)},$$

mas $X+Y \sim B(2n,p)$.

... continuação do Exemplo 20.1. Temos que

$$P(X = k | X+Y = m) = \frac{\left\{ \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \right\} \left\{ \binom{n}{m-k} p^{m-k} (1-p)^{n-m+k} \right\}}{\binom{2n}{m} p^m (1-p)^{n-m}}$$

isto é:

$$P(X = k | X + Y = m) = \frac{\binom{n}{k}\binom{n}{m-k}}{\binom{2n}{m}},$$

para $k \in \{0, 1, \ldots, \min\{n, m\}\}$.

... continuação do Exemplo 20.1. A partir daqui temos duas opções:

- Calcular $E(X|X+Y=m) = \sum_k k\, P(X=k|X+Y=m)$,
- ou reconhecer que:

$$X|X+Y=m \sim H(m, 2n, n)$$

e portanto: $E(X|X+Y=m) = \dfrac{nm}{2n} = \dfrac{m}{2}$.

Caso de variáveis aleatórias continuas

Observação!

X, Y *continuas* $\Rightarrow E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X|Y}(x|y)\, dx = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x \left\{ \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \right\} dx.$

Exemplo 20.2

Suponha que a densidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y é dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x/y}\, e^{-y}}{y}, & se\ x, y \in (0, \infty), \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

Para calcular $E(X|Y=y)$ note que

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{(1/y)\, e^{-x/y}\, e^{-y}}{f_Y(y)} = C\, \frac{1}{y}\, e^{-x/y}.$$

... continuação do Exemplo 20.2. Temos que

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{1}{y} e^{-x/y}, & \text{se } x \in (0, \infty), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A partir daqui temos duas opções:

- Calcular $E(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f_{X|Y}(x|y) dx$,
- ou reconhecer que:

$$X|Y = y \sim Exp(1/y)$$

e portanto: $E(X|Y = y) = y$.

A esperança condicional como variável aleatória

Sejam X, Y duas variáveis aleatórias em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Se

$$\varphi(y) := E(X|Y = y)$$

então $\varphi(Y) = E(X|Y)$ é uma variável aleatória chamada esperança condicional de X dada Y.

Propriedade importante: $E(E(X|Y)) = E(X)$. Isto é:

$$E(X) = \int E(X|Y = y)\, dF_Y(y).$$

- Se Y é discreta: $E(X) = \sum_y E(X|Y = y)P(Y = y)$,
- Se Y é continua: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} E(X|Y = y)f_Y(y)$

Propriedades da esperança condicional

Observação!

Na sequência Y é uma v.a. e X, X_1, X_2 são integráveis, todas em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

- Se $X = c$, com c uma constante, então $E(X|Y) = c$.
- Se $X_1 \leq X_2$ então $E(X_1|Y) \leq E(X_2|Y)$.
- **Linearidade.** $E(aX_1 + bX_2|Y) = aE(X_1|Y) + bE(X_2|Y)$.
- **Jensen.** Se φ é convexa então $\varphi(E(X|Y)) \leq E(\varphi(X)|Y)$.
- **Princípio da substituição.** Se $\varphi(X, Y)$ é integrável, então

$$E(\varphi(X, Y)|Y = y) = E(\varphi(X, y)|Y = y).$$

- Se X e Y são independentes então $E(X|Y) = E(X)$.

Esperança da soma de um # aleatório de variáveis aleatórias.

Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias $i.i.d$ e N uma variável aleatória discreta com valores em $\mathbb{N}$, independente às X_i's.

$$\text{Se } Y = \sum_{i=1}^{N} X_i \text{ então } E(Y) = E(X_1)E(N).$$

De fato, como

$$E(Y|N=n) = E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \middle| N=n\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \middle| N=n\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

temos $E(Y|N=n) = n\,E(X_1)$ e portanto $E(Y|N) = N\,E(X_1)$. Logo:

$$E(Y) = E(E(Y|N)) = E(NE(X_1)) = E(X_1)E(N).$$

Processo de ramificação

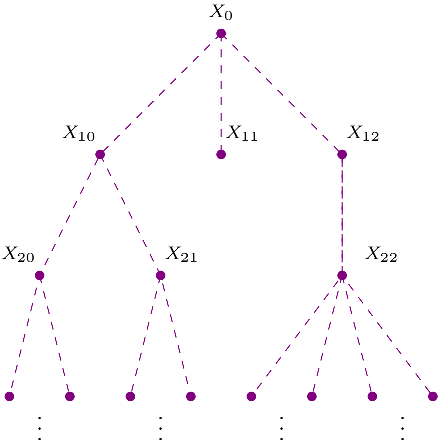
Considere uma v.a. discreta X com função de probabilidade

$$P(X = i) = p_i,$$

para $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

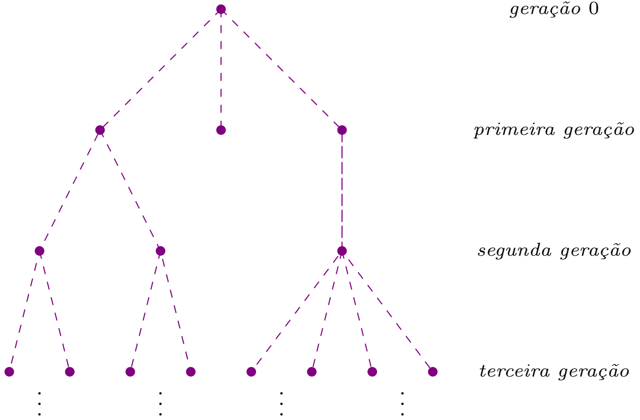
No que segue, todas as v.a. são cópias independentes de X.

Processo de ramificação: ideia



Pergunta: O processo continuará indefinidamente ou não?

Processo de ramificação: gerações



Processo de ramificação

Considere, para cada $n \geq 0$, a variável aleatória:

$$Z_n = \# \text{ de partículas da } n\text{-ésima geração.}$$

A sequência $(Z_n)_{n\geq 0}$ chama-se de processo de ramificação.

é uma Cadeia de Markov.

O evento $\mathcal{E} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}$ chama-se extinção do processo. Vamos provar que

$$m := E(X) < 1 \Rightarrow P(\mathcal{E}) = 1.$$

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Extinção do processo de ramificação

Suponha que $m < 1$. Para todo $n \geq 1$ temos que

$$Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_i,$$

onde as X_i's são i.i.d. à variável aleatória X com $E(X) = m$. Então,

$$E(Z_n) = m\, E(Z_{n-1}),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, o que implica: $E(Z_n) = m^n$. Então,

$$P(\mathcal{E}^c) = P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \{Z_n \geq 1\}\right) \underset{\{Z_n \geq 1\} \searrow}{=} \lim_{n\to\infty} P(Z_n \geq 1) \underset{P(Z_n \geq 1) \leq E(Z_n)}{\leq} \lim_{n\to\infty} E(Z_n) \underset{m<1}{=} 0$$

Esperança condicional para o cálculo de probabilidades

Seja A um evento aleatório. Se

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se } A \text{ ocorre,} \\ 0, & \text{se } A^c \text{ ocorre,} \end{cases}$$

então, a partir de $E(X) = E(E(X|Y))$ concluímos que:

- Se Y é discreta:

$$P(A) = \sum_y P(A|Y = y)P(Y = y),$$

- Se Y é continua:

$$P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} P(A|Y = y)f_Y(y)dy.$$

Exemplo 20.3

Sejam X e Y independentes com densidades f_X e f_Y resp. Então:

$$\begin{aligned} P(X < Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} P(X < Y | Y = y) f_Y(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P(X < y | Y = y) f_Y(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(y) f_Y(y) dy \end{aligned}$$

Por exemplo, se $X \sim Exp(\lambda_1)$ e $Y \sim Exp(\lambda_2)$ então

$$P(X < Y) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Bom estudo!