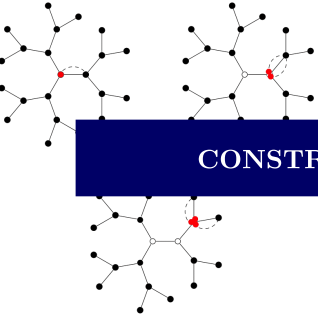
PGE966 - Processos Estocásticos

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE



CONSTRUÇÃO DE PROCESSOS DE POISSON

Prof. Pablo M. Rodriguez
https://www.pablo-rodriguez.org

Universidade Federal de Pernambuco
CCEN
Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo

- Construção de processos de Poisson

Processo de Poisson

Definição 1

O processo de contagem $(N(t))_{t\geq 0}$ *é um processo de Poisson de parâmetro* λ, $\lambda > 0$, *se:*

i. $N(0) = 0$;

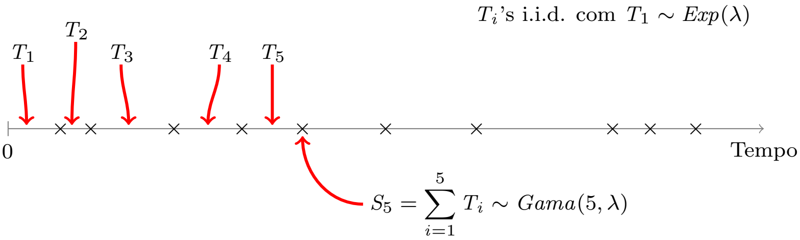
ii. *o processo tem incrementos independentes;*

iii. *para todo* $s, t \geq 0$, *com* $s < t$,

$$N(s,t) \sim Poisson(\lambda(t-s)).$$

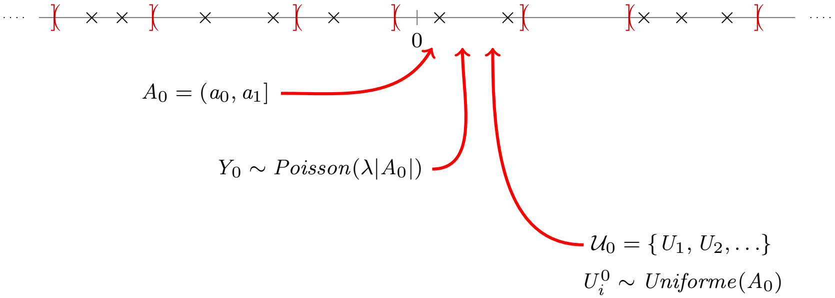
Denotamos $(N(t))_{t\geq 0} \sim P.P.(\lambda)$.

Processo de Poisson



- $N(I) \sim Poisson(\lambda|I|)$,
- $N(I)$ e $N(J)$ são independentes se $I \cap J = \emptyset$,
- Dado $N(I) = n$, os pontos estão como i.i.d. Uniformes em I.

Construção de um $P.P.(\lambda)$ em $\mathbb{R}$



O resultado é um $P.P.(\lambda)$ em $\mathbb{R}$!

Construção de um $P.P.(\lambda)$ em $\mathbb{R}$

Passo 1. Consideramos uma partição de $\mathbb{R}$ em intervalos disjuntos:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} A_i,$$

com $A_i := (a_i, b_i]$, $a_i < b_i$, $b_i = a_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$ e $0 \in A_0$.

Passo 2. Para cada A_i associamos uma v.a.

$$Y_i \sim Poisson(\lambda |A_i|).$$

Isto é,

$$P(Y_i = k) = e^{-\lambda |A_i|} \frac{(\lambda |A_i|)^k}{k!}, \text{ para todo } k \geq 0.$$

Além disto, supomos que $(Y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ são independentes.

Construção de um $P.P.(\lambda)$ em $\mathbb{R}$

Passo 3. Para cada A_i associamos uma sequência

$$\mathcal{U}_i = \{U_1^i, U_2^i, \ldots\}$$

de v.a. i.i.d. com $U_1^i \sim Uniforme(A_i)$. Isto é,

$$P(U_1^i \in A) = \frac{|A \cap A_i|}{|A_i|}.$$

Além disto, supomos que $(\mathcal{U}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ é independente de $(Y_i)_{i\in\mathbb{Z}}$.

Construção de um $P.P.(\lambda)$ em $\mathbb{R}$

Passo 4. Consideramos o conjunto aleatório de pontos

$$\mathcal{S} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{S}_i$$

onde

$$\mathcal{S}_i = \begin{cases} \{U_k^i : 1 \leq k \leq Y_i\}, & \text{se } Y_i \geq 1, \\ \emptyset, & \text{se } Y_i = 0. \end{cases}$$

Isto é, em cada intervalo A_i colocamos Y_i pontos distribuídos uniformemente no intervalo.

Construção de um $P.P.(\lambda)$ em $\mathbb{R}$

Passo 5. Consideramos a sequência $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, como sendo a sequência ordenada de pontos de $\mathcal{S}$ tal que

$$S_1 \text{ é o primeiro ponto à direita do } 0.$$

Passo 6. Para todo $a \subset \mathbb{R}$ definimos a v.a.

$$N(A) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 1_{\{S_n\in A\}},$$

o número de pontos de $\mathcal{S}$ em A.

Processo pontual: $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ definida desta forma é um Processo de Poisson de parâmetro λ em $\mathbb{R}$. Em particular:

1. $N(B) \sim Poisson(\lambda|B|)$ para qualquer $B \subset \mathbb{R}$;
2. $N(B_1)$ e $N(B_2)$ são independentes se $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

Vamos provar (1), e deixamos (2) como exercício.

Note que, para todo $i \in \mathbb{Z}$, os $B \cap A_i$ são disjuntos. Então as v.a.'s $N(B \cap A_i)$ são independentes pois, se $i \neq j$, temos que

- $N(B \cap A_i)$ é função das v.a.'s $U_1^i, U_2^i, \dots U_{Y_i}^i$, enquanto que
- $N(B \cap A_j)$ é função das v.a.'s $U_1^j, U_2^j, \dots U_{Y_j}^j$.

É suficiente verificar que $N(B \cap A_i) \sim Poisson(\lambda |B \cap A_i|)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. De fato, neste caso teríamos:

$$N(B) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} N(B \cap A_i) \sim Poisson(\lambda |B|).$$

Para mostrar que $N(B \cap A_i) \sim Poisson(\lambda |B \cap A_i|)$ note que:

$$
\begin{aligned}
P(N(B \cap A_i) = k) &= P\left(\bigcup_{\ell=k}^{\infty} \{Y_i = \ell, N(B \cap A_i) = k\}\right) \\
&= \sum_{\ell=k}^{\infty} P\left(Y_i = \ell, N(B \cap A_i) = k\right) \\
&= \sum_{\ell=k}^{\infty} P\left(Y_i = \ell, \sum_{j=1}^{\ell} 1_{\left\{U_j^i \in B \cap A_i\right\}} = k\right) \\
&= \sum_{\ell=k}^{\infty} P\left(Y_i = \ell\right) P\left(\sum_{j=1}^{\ell} 1_{\left\{U_j^i \in B \cap A_i\right\}} = k\right)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, note que

$$1_{\{U_j^i \in B \cap A_i\}} \sim Bernoulli\left(\frac{|B \cap A_i|}{|A_i|}\right)$$

e como as U_j^i são independentes entre si, temos que

$$\sum_{j=1}^{\ell} 1_{\{U_j^i \in B \cap A_i\}} \sim Binomial\left(\ell, \frac{|B \cap A_i|}{|A_i|}\right).$$

Isto é,

$$P\left(\sum_{j=1}^{\ell} 1_{\{U_j^i \in B \cap A_i\}} = k\right) = \binom{\ell}{k}\left(\frac{|B \cap A_i|}{|A_i|}\right)^k \left(1 - \frac{|B \cap A_i|}{|A_i|}\right)^{\ell - k}.$$

Logo, $P(N(B \cap A_i) = k)$ é igual a

$$\sum_{\ell=k}^{\infty} \left\{ e^{-\lambda|A_i|} \frac{(\lambda|A_i|)^\ell}{\ell!} \right\} \left\{ \binom{\ell}{k} \left(\frac{|B \cap A_i|}{|A_i|} \right)^k \left(1 - \frac{|B \cap A_i|}{|A_i|} \right)^{\ell-k} \right\}$$

que podemos reescrever como

$$e^{-\lambda|A_i|} \frac{(\lambda|B \cap A_i|)^k}{k!} \sum_{\ell=k}^{\infty} \left\{ \frac{(\lambda|A_i|)^{\ell-k}}{(\ell-k)!} \right\} \left\{ \left(1 - \frac{|B \cap A_i|}{|A_i|} \right)^{\ell-k} \right\}$$

que por sua vez é igual a:

$$e^{-\lambda|A_i|} \frac{(\lambda|B \cap A_i|)^k}{k!} \sum_{\ell=k}^{\infty} \frac{(\lambda|A_i| - \lambda|B \cap A_i|)^{\ell-k}}{(\ell-k)!}.$$

Portanto: $P(N(B \cap A_i) = k) = e^{-\lambda|B \cap A_i|} \dfrac{(\lambda|B \cap A_i|)^k}{k!}.$

Processo de Poisson bidimensional

De forma análoga é construido um processo de Poisson bidimensional de parâmetro λ em $\mathbb{R}^2$. Neste caso, se $A \subset \mathbb{R}^2$ e

$$M(A) = \# \text{ pontos em } \mathcal{S} \cap A$$

então:

1. $M(B) \sim Poisson(\lambda \, Area(B))$ para qualquer $B \subset \mathbb{R}^2$;
2. $M(B_1)$ e $M(B_2)$ são independentes se $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

Exemplo 1

Considere um processo de Poisson bidimensional de parâmetro λ. Seja

V *a distância do ponto do processo que está mais próximo da origem.*

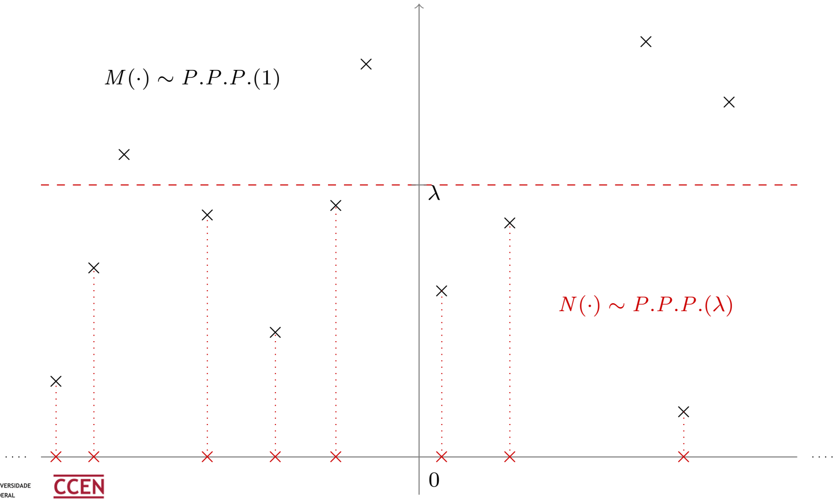
Então,

$$V = \inf\{|x| : x \in \mathcal{S}\}$$

e, se $B(0,x) := \{y \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq |x|\}$, *então*

$$P(V > x) = P(M(B(0,x)) = 0) = e^{-\lambda Area(B(0,x))} = e^{-\lambda ß x^2}.$$

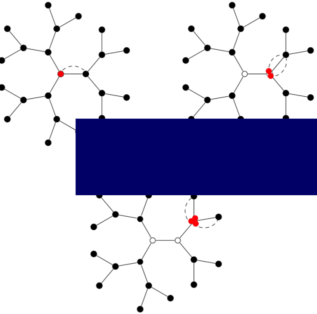
Processo de Poisson unidimensional como projeção de um bidimensional



Referências

Sheldon M. Ross. Introduction to Probability Models. 10th ed. Academic Press. 2010. (Capítulo 5)

P. Ferrari, A. Galves. Acoplamento em processos estocásticos. SBM. IMPA. Rio de Janeiro. 1997.



Bom estudo!

Prof. Pablo M. Rodriguez
https://www.pablo-rodriguez.org
e-mail: pablo@de.ufpe.br