# Aula 18: Esperança da função de um vetor aleatório

Disciplina: PGE950 - Probabilidade

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE

Prof. Pablo M. Rodriguez

http://www.pablo-rodriguez.org

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

# Conteúdo desta aula

- Esperança da função de um vetor aleatório.
- Covariância e coeficiente de correlação.

# Esperança de uma função de um vetor aleatório

## Proposição 18.1

*Se* $(X, Y)$ *é um vetor aleatório e* $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *é mensurável, então:*

- *Se* $(X, Y)$ *for discreto:*

$$E(g(X, Y)) = \sum_{j \in \mathcal{S}_Y} \sum_{i \in \mathcal{S}_X} g(i, j) p(i, j).$$

- *Se* $(X, Y)$ *for contínuo:*

$$E(g(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) \, dx \, dy.$$

*Prova da Prop.18.1.* Vamos provar o caso discreto. Se $Z := g(X, Y)$ e

$$\mathcal{S}_Z = \{z_1, z_2, z_3, \ldots\}$$

Podemos reescrever $\displaystyle\sum_{j \in \mathcal{S}_Y} \sum_{i \in \mathcal{S}_X} g(i,j)p(i,j)$ como

$$\underbrace{\sum_{j \in \mathcal{S}_Y} \sum_{i \in \mathcal{S}_X}}_{i,j:g(i,j)=z_1} z_1\, p(i,j) + \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{S}_Y} \sum_{i \in \mathcal{S}_X}}_{i,j:g(i,j)=z_2} z_2\, p(i,j) + \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{S}_Y} \sum_{i \in \mathcal{S}_X}}_{i,j:g(i,j)=z_3} z_3\, p(i,j) + \cdots$$

Mas $\displaystyle\underbrace{\sum_{j \in \mathcal{S}_Y} \sum_{i \in \mathcal{S}_X}}_{i,j:g(i,j)=z_1} z_1\, p(i,j) = z_1 \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{S}_Y} \sum_{i \in \mathcal{S}_X}}_{i,j:g(i,j)=z_1} p(i,j) = z_1 P\left(g(X,Y) = z_1\right).$

Portanto, $\displaystyle\sum_{j \in \mathcal{S}_Y} \sum_{i \in \mathcal{S}_X} g(i,j)p(i,j) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k P(Z = z_k) = E(Z).$

# Linearidade da esperança

## Corolário 18.1

*Se $X_1, \ldots, X_n$ são v.a. e $c_1, \ldots, c_n$ são constantes, então*

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i E(X_i).$$

*Ideia da prova.* Vamos mostrar para o caso discreto e $n = 2$.

$$\begin{aligned}
E\left(c_1 X_1 + c_2 X_2\right) &= \sum_{j \in \mathcal{S}_2} \sum_{i \in \mathcal{S}_1} (c_1\, i + c_2\, j) p(i,j). \\
&= c_1 \sum_{j \in \mathcal{S}_2} \sum_{i \in \mathcal{S}_1} i\, p(i,j) + c_2 \sum_{j \in \mathcal{S}_2} \sum_{i \in \mathcal{S}_1} j\, p(i,j). \\
&= c_1\, E(X_1) + c_2\, E(X_2)
\end{aligned}$$

# Independência

## Proposição 18.2

*$X_1, \ldots, X_n$ são independentes e integráveis, então $\prod_{i=1}^{n} X_i$ é integrável e*

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$

*Ideia da prova.* Vamos mostrar para o caso discreto e $n = 2$.

$$\begin{aligned}
E\,(X_1 X_2) &= \sum_{j\in\mathcal{S}_2}\sum_{i\in\mathcal{S}_1}(i\,j)p(i,j). \\
&= \sum_{j\in\mathcal{S}_2}\sum_{i\in\mathcal{S}_1}(i\,j)\,p_1(i)\,p_2(j) \\
&= \left\{\sum_{j\in\mathcal{S}_2} j\,p_2(j)\right\}\left\{\sum_{i\in\mathcal{S}_1} i\,p_1(i)\right\} = E(X_2)E(X_1).
\end{aligned}$$

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

**Observação!**

$E(XY) = E(X)E(Y) \not\Rightarrow X$ *e* $Y$ *são independentes.*

## Exemplo 18.1

*Considere a variável aleatória* $X$ *tal que:*

$$P(X=-1) = \frac{1}{4}, \quad P(X=0) = \frac{1}{2}, \quad P(X=1) = \frac{1}{4},$$

*e a variável aleatória* $Y$ *definida por:*

$$Y = \begin{cases} 0, & se\ X \neq 0, \\ 1, & se\ X = 0. \end{cases}$$

*Como* $XY = 0$ *então* $E(XY) = 0$ *e como* $E(X) = 0$ *temos que*

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

*Mas* $X$ *e* $Y$ *não são independentes.*

# Covariância

Se $X$ e $Y$ são integráveis, chama-se covariância de $X$ e $Y$ ao valor

$$Cov(X,Y) = E(\{X - E(X)\}\{Y - E(Y)\}).$$

**Observação!**

- $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
- *Se* $Cov(X,Y) = 0$ *dizemos que* $X$ *e* $Y$ *são não-correlacionadas.*

## Proposição 18.3

1. $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$.
2. $Cov(X,X) = Var(X)$.
3. $Cov(aX,Y) = a\,Cov(X,Y)$.
4. $Cov\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} Cov(X_i, Y_j)$.

## Teorema 18.1

*Se* $X_1, \ldots, X_n$ *são integráveis, então*

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j).$$

## Corolário 18.2

*Se* $X_1, \ldots, X_n$ *são integráveis e* $Cov(X_i, X_j) = 0$ *para* $i \neq j$*, então*

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i).$$

# Coeficiente de correlação

Sejam $X, Y$ integráveis com variâncias $0 < \sigma_X^2 < \infty$ e $0 < \sigma_Y^2 < \infty$. Chama-se coeficiente de correlação entre $X$ e $Y$ ao valor

$$\rho(X, Y) := \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

## Proposição 18.4

*Sejam $X$ e $Y$ tais que $0 < \sigma_X^2 < \infty$ e $0 < \sigma_Y^2 < \infty$. Então,*

1. $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.
2. $\rho(X, Y) = 1$ *se, e somente se,* $Y = aX + b$, *para* $a > 0$ *e* $b \in \mathbb{R}$.
3. $\rho(X, Y) = -1$ *se, e somente se,* $Y = aX + b$, *para* $a < 0$ *e* $b \in \mathbb{R}$.

**Observação!**

$\rho(X, Y)$ *representa a dependência linear entre* $X$ *e* $Y$.

*Prova da Prop.18.4. (1)* Como

$$\left(\frac{X-E(X)}{\sigma_X}-\frac{Y-E(Y)}{\sigma_Y}\right)^2 \geq 0$$

então

$$\begin{aligned}
0 &\leq E\left\{\left(\frac{X-E(X)}{\sigma_X}-\frac{Y-E(Y)}{\sigma_Y}\right)^2\right\} \\
&= E\left\{\left(\frac{X-E(X)}{\sigma_X}\right)^2\right\}+E\left\{\left(\frac{Y-E(Y)}{\sigma_Y}\right)^2\right\}-\frac{2E\{(X-E(X))(Y-E(Y))\}}{\sigma_X\sigma_Y} \\
&= \frac{Var(X)}{\sigma_X^2}+\frac{Var(Y)}{\sigma_Y^2}-\frac{2Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} \\
&= 2-2\rho(X,Y).
\end{aligned}$$

Então $\rho(X,Y)\leq 1$. Para mostrar que $\rho(X,Y)\geq -1$ use que

$$\left(\frac{X-E(X)}{\sigma_X}+\frac{Y-E(Y)}{\sigma_Y}\right)^2 \geq 0.$$

*Prova da Prop.18.4. (2)* Suponha que $\rho(X, Y) = 1$. Então

$$E\left\{\left(\frac{X - E(X)}{\sigma_X} - \frac{Y - E(Y)}{\sigma_Y}\right)^2\right\} = 0$$

mas isto implica que

$$P\left\{\left(\frac{X - E(X)}{\sigma_X} - \frac{Y - E(Y)}{\sigma_Y}\right) = 0\right\} = 1.$$

Isto é, $Y = E(Y) + \dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - E(X))$. Reciprocamente, se existem $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$ tais que $P(Y = aX + b) = 1$, então

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{Cov(X, aX + b)}{\sigma_X \sqrt{a^2 \sigma_X^2}} = \frac{Var(X)}{\sigma_X^2} = 1.$$

*(3)* Fica de exercício.

Bom estudo!