ET581 - Probabilidade 1

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

ESPERANÇA E VARIÂNCIA

Prof. Pablo M. Rodriguez

https://www.pablo-rodriguez.org/et581-probabilidade1

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo da Aula 19

- Esperança e variância.

Valor esperado

Se X é uma variável aleatória com função de probabilidade $p(x)$ então a esperança de X, denotada por $E[X]$, é definida por

$$E[X] = \sum_{x:p(x)>0} x\, p(x).$$

Interpretação: A esperança, também chamada de valor esperado ou média de X, é uma média ponderada dos possíveis valores que X pode receber, com cada valor sendo ponderado pela probabilidade de que X seja igual a esse valor.

Deste modo é uma espécie de *ponto de equilíbrio*, em torno do qual valores de X se distribuem. Por essa razão é também conhecida como uma das medidas de posição da distribuição de X.

Exemplo 19.1

Se a função de probabilidade de X é dada por

$$p(1) = p(3) = \frac{1}{2}$$

então

$$E[X] = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1+3}{2} = 2$$

é a média ordinária dos dois valores possíveis de X.

Exemplo 19.2

Se a função de probabilidade de X é dada por

$$p(1) = \frac{1}{3} \qquad p(3) = \frac{2}{3}$$

então

$$E[X] = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1 + 2 \cdot 3}{3} = \frac{7}{3} = 2,33$$

é uma média ponderada dos dois valores possíveis, 1 *e* 3*, onde ao valor* 3 *se dá duas vezes mais peso do que ao valor* 1*, pois*

$$p(3) = 2p(1).$$

Problema

Determine $E[X]$, onde X é o resultado que obtemos quando rolamos um dado honesto.

Solução. Como o dado é honesto e X toma valores em $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ então

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$$

e portanto

$$E[X] = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 5\left(\frac{1}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{7}{2} = 3,5.$$

Esperança de uma variável aleatória indicadora

Lembre que dado um evento qualquer A, a variável aleatória indicadora de A é a variável aleatória I_A definida como

$$I_A = \begin{cases} 1 & \text{se o evento } A \text{ ocorrer,} \\ 0 & \text{se o evento } A^c \text{ ocorrer.} \end{cases}$$

Neste caso,

$$E[I_A] = 0 \cdot P(I = 0) + 1 \cdot P(I = 1) = 0 \cdot P(A^c) + 1 \cdot P(A) = P(A).$$

Isto é, a esperança da variável aleatória indicadora de A é a probabilidade de ocorrência do evento A.

Exemplo

Uma turma com 120 estudantes é levada em 3 ônibus para a apresentação de uma orquestra sinfônica. Há 36 estudantes em um dos ônibus, 40 no outro e 44 no terceiro ônibus. Quando os ônibus chegam, um dos 120 estudantes é escolhido aleatoriamente. Suponha que X represente o número de estudantes que vieram no mesmo ônibus do estudante escolhido e determine $E[X]$.

Solução. Como o estudante escolhido aleatoriamente pode ser, com mesma probabilidade, qualquer um dos 120 estudantes, temos que

$$P(X = 36) = \frac{36}{120} \qquad P(X = 40) = \frac{40}{120} \qquad P(X = 44) = \frac{44}{120}.$$

Então,

$$E[X] = 36\left(\frac{36}{120}\right) + 40\left(\frac{40}{120}\right) + 44\left(\frac{44}{120}\right) = \frac{1208}{30} = 40,2667.$$

Esperança como centro de gravidade

O conceito de esperança é análogo ao conceito de centro de gravidade de uma distribuição de massas. Antes de passar à essa analogia, vamos lembrar o que é o centro de gravidade. Para isso tome uma barra numerada sem massa e apoie sobre ela uma série de pesos. Para o peso localizado na posição x_i diremos que a massa é $p(x_i)$, como na figura abaixo.

O centro de gravidade será o "ponto de equilíbrio" deste sistema de pesos. Mais precisamente, é o local onde o torque resultante é zero. Para os pesos acima, se g é a aceleração da gravidade, então o centro de gravidade está no ponto c onde

$$g \cdot p(x_1) \cdot (x_1 - c) + g \cdot p(x_2) \cdot (x_2 - c) + g \cdot p(x_3) \cdot (x_3 - c) + g \cdot p(x_4) \cdot (x_4 - c) = 0.$$

Se considerarmos que $p(x_1) + p(x_2) + p(x_3) + p(x_4) = 1$, então

$$c = x_1 \cdot p(x_1) + x_2 \cdot p(x_2) + x_3 \cdot p(x_3) + x_4 \cdot p(x_4)$$

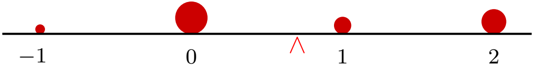
Esperança como centro de gravidade

Voltando à analogia, considere uma variável aleatória discreta X com função de probabilidade $p(x_i) = P(X = x_i)$, $i \geq 1$. Imagine também uma haste sem peso na qual pesos com massa $p(x_i)$, $i \geq 1$, estejam localizados nos pontos x_i, $i \geq 1$. Assim temos que o centro de gravidade c da haste é dada por

$$c = \sum_i x_i \cdot p(x_i) = E[X].$$

Se, por exemplo, os pesos da figura abaixo têm massas

$$p(-1) = 0,1,\ p(0) = 0,4,\ p(1) = 0,2,\ \text{e}\ \ p(2) = 0,3,$$



o centro de gravidade será dado por:

$$= (-1) \times 0,1 + 0 \times 0,4 + 1 \times 0,2 + 2 \times 0,3 = 0,7.$$

Problema

Suponha que X é uma variável aleatória com função de probabilidade:

$$P(X=-1)=0,2 \qquad P(X=0)=0,5 \qquad P(X=1)=0,3.$$

Calcule $E[X^2]$.

Solução. Note que o problema é calcular a esperança de uma função de uma variável aleatória. Como $Y = X^2$ é também uma variável aleatória, uma forma de fazer isto é encontrando sua função de probabilidade. Isto é:

$$P(Y=1)=P(X=-1)+P(X=1)=0,5$$

$$P(Y=0)=P(X=0)=0,5.$$

Logo,

$$E[X^2]=E[Y]=0\,P(Y=0)+1\,P(Y=1)=0\times(0,5)+1\times(0,5)=0,5.$$

Esperança de uma função de uma variável aleatória

Theorem 1

Seja X uma variável aleatória discreta com possíveis valores x_i, $i \geq 1$ e função de probabilidade $p(a)$. Então, para qualquer função real g,

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p(x_i).$$

... voltando ao exemplo anterior, note que agora pelo teorema:

$$E[X^2] = (-1)^2 \times (0,2) + 0^2 \times (0,5) + 1^2 \times (0,3) = 1 \times (0,2 + 0,3) + \times (0,5) = 0,5.$$

Demonstração.

A ideia é agrupar aqueles valores nos quais os $g(x_i)$ são iguais:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)\, p(x_i) &= \sum_j \left\{ \sum_{i:g(x_i)=y_j} g(x_i)\, p(x_i) \right\} \\
&= \sum_j \left\{ \sum_{i:g(x_i)=y_j} y_j\, p(x_i) \right\} \\
&= \sum_j y_j \left\{ \sum_{i:g(x_i)=y_j} p(x_i) \right\} \\
&= \sum_j y_j\, P\left(g(X) = y_j\right) \\
&= E[g(X)].
\end{aligned}$$

$\square$

Propriedade

Mais uma propriedade importante é a seguinte: Se a e b são constantes, então

$$E[aX + b] = a\,E[X] + b.$$

De fato, note que:

$$\begin{aligned} E[aX + b] &= \sum_{x:p(x)>0} (ax + b)\,p(x) \\ &= a \sum_{x:p(x)>0} x\,p(x) + b \sum_{x:p(x)>0} p(x) \\ &= a\,E[X] + b. \end{aligned}$$

Variância: Motivação

Para uma variável aleatória discreta X, o valor esperado $E[X]$ dá uma média ponderada dos valores possíveis de X mas não diz nada sobre a variação destes valores. Por exemplos as v.a. W, Y e Z com funções de probabilidade dadas por:

$$P(W = 0) = 1,$$

$$P(Y = 1) = P(Y = -1) = \frac{1}{2}$$

$$P(Z = 100) = P(Z = -100) = \frac{1}{2}$$

são tais que $E[W] = E[Y] = E[Z] = 0$, porém a variação dos seus possíveis valores é bem diferente.

Uma forma de representar estas variações é através da variância!

Variância: Definição

Se X é uma variável aleatória com média $\mu = E[X]$, então a variância de X, representada por $Var[X]$, é definida como

$$Var[X] = E\left[(X-\mu)^2\right].$$

Observação

Note que $Var[X]$ está nos dizendo quão distante está X, em média, da sua esperança μ.

Uma fórmula útil!

Uma fórmula muito útil para a variância de uma variável aleatória X é:

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 .$$

De fato, note que:

$$\begin{aligned}
Var[X] &= E\left[(X-\mu)^2\right] \\
&= \sum_x (x-\mu)^2\, p(x) \\
&= \sum_x (x^2 - 2\mu + \mu^2)\, p(x) \\
&= \sum_x x^2\, p(x) - 2\mu \sum_x x\, p(x) + \mu^2 \sum_x p(x) \\
&= E[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2 \\
&= E[X^2] - \mu^2.
\end{aligned}$$

Problema

Calcule $Var[X]$ para a variável aleatória X que representa o resultado de um dado honesto.

Solução. Sabemos que $E[X] = 7/2$. Por outro lado,

$$E[X^2] = 1^2\left(\frac{1}{6}\right)+2^2\left(\frac{1}{6}\right)+3^2\left(\frac{1}{6}\right)+4^2\left(\frac{1}{6}\right)+5^2\left(\frac{1}{6}\right)+6^2\left(\frac{1}{6}\right) = 91\left(\frac{1}{6}\right).$$

Então,

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}.$$

Propriedade

Para finalizar, vamos ver uma propriedade importante da variância:
Se a e b são constantes, então

$$Var[aX + b] = a^2 \, Var[X].$$

De fato, note que

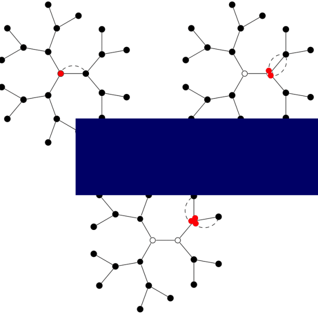
$$\begin{aligned} Var[aX + b] &= E[(\{aX + b\} - \{a\,\mu + b\})^2] \\ &= E[(aX + b - a\,\mu - b)^2] \\ &= E[a^2(X - \mu)^2] \\ &= a^2 E[(X - \mu)^2] \\ &= a^2 \, Var[X]. \end{aligned}$$

Referência!

Ross, S. Probabilidade: Um curso moderno com aplicações, 8a ed., Bookman, 2010.

Exercícios:

- Capítulo 4 (Ross): 4.25, 4.27, 4.28 (pág. 218).



Bom estudo!