Lista 2 • Processos de Poisson
ET658 - Processos Estocásticos
Prof. Pablo Martín Rodríguez

---

1. Suponha que o tempo gasto por uma pessoa em uma fila de um banco é uma variável aleatória com distribuição exponencial com valor esperado igual a 10 minutos. Calcule:
   (a) a probabilidade de que uma pessoa gastará pelo menos 15 minutos no banco;
   (b) probabilidade de que uma pessoa gastará mais do que 15 minutos, dado que ela está no banco há 10 minutos.
2. Suponha que certa agência dos correios funciona com apenas dois caixas. Suponha que na chegada de um novo cliente, cada caixa esta ocupado com um cliente e não há mais clientes na agência. Se a quantidade de tempo que um caixa demora com um cliente é distribuída exponencialmente com parâmetro λ. Qual é a probabilidade de que, dos três clientes, o último em chegar seja o último a deixar a agência?
3. No exercício anterior, suponha que na chegada do novo cliente cada caixa esta ocupado com um cliente e além disso há uma fila única formada por outros 3 clientes em espera a serem atendidos. Quando um dos caixas termina o atendimento com um cliente, o primeiro na fila entra no caixa. Supondo que todos os tempos de atendimento são independentes e exponencialmente distribuídos com parâmetro λ, calcule o tempo esperado até que o último cliente em chegar é atendido por algum dos caixas.
4. Um teste é realizado com 100 itens funcionando simultaneamente. Suponha que os tempos de vida individuais são variáveis aleatórias independentes com média 200 horas. O teste é finalizado quando ocorrem 5 falhas. Se T é o tempo de duração do teste, encontre $E(T)$.
5. Defeitos ocorrem ao longo do comprimento de um cabo de fibra óptica com intensidade $\lambda = 2$ por metro.
   (a) Calcule a probabilidade de que não há defeitos no primeiro metro do cabo.
   (b) Calcule a probabilidade condicional de que não há nenhum defeito no segundo metro do cabo dado que o primeiro metro contém um defeito.
6. Seja $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ um processo de Poisson de parâmetro λ. Para $s < r < t$ calcule:
$$P(N(s) = k, N(r) - N(s) = j | N(t) = n).$$
7. Fregueses chegam a certa loja de acordo com um processo de Poisson com taxa 4 por hora. Dado que a loja abre às 9h00, qual é a probabilidade de que exatamente um freguês chegue até às 9h30 e um total de cinco chegue até às 11h30?
8. Para um processo de Poisson de parâmetro λ, calcule a distribuição de S_2, o instante da segunda chegada.

9. Suponha que certo evento ocorre de acordo com um processo de Poisson com taxa 2 por hora.
   (a) Qual é a probabilidade de que nenhum evento ocorra entre as 8p.m. e as 9p.m.?
   (b) Qual é o tempo esperado até o quarto evento ocorrer?
10. Suponha que pacotes SMTP chegam a um servidor de e-mails de acordo com um processo de Poisson com taxa 2. Seja $N(t)$ o número de mensagens que chegam até o tempo t. Determine as seguintes probabilidades:
    (a) $P(N(1) = 2)$;
    (b) $P(N(1) = 2, N(3) = 6)$;
    (c) $P(N(1) = 2|N(3) = 6)$;
    (d) $P(N(3) = 6|N(1) = 2)$.
11. Seja $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ um processo de Poisson de parâmetro λ. Calcule:
    (a) $E(N(3, 7))$;
    (b) $P(N(2, 5) = 7|N(2, 6) = 8)$;
    (c) $E(N(t, t + s)N(t, t + s + r))$.
12. Seja $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ um processo de Poisson de parâmetro 2. Calcule:
    (a) $E\left((N(2, 7))^2\right)$;
    (b) $P\left(N(2, 5) = 7, N(7, 10) = 2 \,|\, N(0, 10) = 10\right)$;
    (c) $E\left(N(2, 7)N(2, 9)\right)$.
13. Fregueses chegam a uma loja de acordo com um processo de Poisson de parâmetro 5 fregueses por hora. Dado que 12 fregueses chegaram durante as duas primeiras horas de abertura, qual é a probabilidade condicional de que cinco fregueses chegaram durante a primeira hora?
14. Um computador envia pacotes TCP/IP para um roteador de acordo com um processo de Poisson de parâmetro 2 pacotes por segundo. Calcule:
    (a) a probabilidade de que o primeiro pacote apareça depois de três segundos;
    (b) a probabilidade de que o primeiro pacote apareça em um tempo maior do que três segundos, mas menor do que cinco segundos;
    (c) a probabilidade de que exatamente um pacote seja enviado no período de três a cinco segundos.
15. Em um banco chegam mulheres de acordo com um processo de Poisson de parâmetro 3 por minuto e homens de acordo com um processo de Poisson independente de parâmetro 4 por minuto. Calcule as seguintes probabilidades:
    (a) chegue um homem antes de uma mulher;
    (b) chegam 3 homens antes da quinta mulher;
    (c) cheguem 3 clientes nos primeiros 3 minutos;
    (d) cheguem 2 homens e nenhuma mulher nos primeiros 3 minutos;
    (e) cheguem 3 mulheres nos primeiros 10 minutos dado que chegaram 7 clientes no mesmo período de tempo.

16. Suponha que apenas três tipos de produtos são vendidos em uma loja de eletrônicos: de tipo A, de tipo B ou de tipo C. Suponha que os produtos de tipo A são vendidos de acordo comum processo de Poisson de parâmetro 10 por hora, os de tipo B de acordo com um processo de Poisson independente de parâmetro 2 por hora, e os de tipo C de acordo com um processo de Poisson, independente aos anteriores, de parâmetro 3 por hora. Calcule as seguintes probabilidades:

    (a) ocorrem 5 vendas na primeira hora.

    (b) ocorrem 2 vendas de produtos de tipo A na primeira hora, dado que ocorreram 6 vendas na loja no mesmo período.

17. Carros e caminhões passam por certo ponto em uma rodovia de acordo com processos de Poisson independentes com taxa 3 e 1 por minuto, respectivamente. Suponha que uma pessoa atravessa a rodovia, neste ponto, sem olhar para os lados e que o tempo necessário para atravessá-la seja de 10 segundos. Supondo que esta pessoa será atropelada se estiver na rodovia quando algum veículo passar, determine a probabilidade de que ele(a) não seja atropelado(a).

18. Suponha que no caixa de um supermercado chegam apenas dois tipos de clientes: aqueles que pagam com cartão chegam de acordo com um processo de Poisson $\{N_1(t)\}_{t\geq 0}$ com parâmetro 6 por hora e aqueles que pagam com cheque chegam de acordo com um processo de Poisson $\{N_2(t)\}_{t\geq 0}$ com parâmetro 8 por hora. Calcule:

    (a) a probabilidade de o primeiro cliente a chegar no banco pagar com cartão;

    (b) a probabilidade de que os 3 próximos clientes pagarem com cheque; dado que nos últimos 10 minutos não chegou nenhum cliente.

19. Clientes chegam a uma loja de acordo com um processo de Poisson com taxa 20 por hora. Calcule a quantidade esperada de vendas realizadas durante o expediente de 8 horas assumindo que a probabilidade de um cliente comprar algum item é de 0.25.

20. Suponha que indivíduos de uma população contraem uma doença de acordo com um processo de Poisson de parâmetro λ. Suponha que o tempo transcorrido desde que uma pessoa contrai a doença até que aparecem os primeiros sintomas é uma variável aleatória com distribuição exponencial com média μ. Assuma também que os períodos de incubação em diferentes indivíduos são independentes. Determine o número esperado de indivíduos que estão doentes no tempo t e o número esperado de indivíduos que estão doentes no tempo t mas ainda não apresentaram sintomas.[1]

21. Uma loja atende ao público de $8h00$ a $17h00$. Suponha que os clientes chegam de acordo com um processo de Poisson não homogêneo com função de intensidade dada por

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 8 \\ 5 + 5(t-8), & 8 \leq t \leq 11 \\ 20, & 11 \leq t \leq 13 \\ 20 - 2(t-13), & 13 \leq t \leq 17 \\ 0, & 17 \leq t \leq 24 \end{cases}$$

    e $\lambda(t) = \lambda(t-24)$ para $t > 24$. Calcule:

    (a) a probabilidade de que nenhum cliente chegue à loja entre as $8h00$ e as $9h30$;

    (b) a probabilidade de que pelo menos 2 clientes cheguem na loja entre $12h00$ e 14h00;

    (c) o número esperado de clientes no período de $10h00$ a $14h00$.

22. Suponha que um SAC recebe reclamações de acordo com um processo de Poisson não homogêneo com função intensidade dada por

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 8 \\ 1.5t, & 8 \leq t \leq 11 \\ 8, & 11 \leq t \leq 13 \\ 0.8t, & 13 \leq t \leq 18 \\ 0, & 18 \leq t \leq 24 \end{cases}$$

[1] Ver Exemplo 5.20 do livro Introduction to probability models, de Ross.

e $\lambda(t) = \lambda(t-24)$ para $t > 24$. Calcule:

(a) a probabilidade de que haverá 2 reclamações das $8h00$ às $8h30$;

(b) o número esperado de reclamações entre as $12h00$ e as $13h00$;

(c) a probabilidade de que sejam recebidas pelo menos 3 reclamações entre as $12h00$ e as $14h45$;

(d) o número médio de reclamações recebidas no período de $08h00$ a $12h00$;

(e) o número médio de reclamações recebidas no período de $12h00$ a $16h30$.

23. Clientes entram em uma Agência dos Correios de acordo com um Processo de Poisson de taxa 2 por minuto. Suponha que cada novo cliente a chegar é um homem sozinho com probabilidade $2/3$, uma mulher sozinha com probabilidade $1/6$, ou um casal com probabilidade $1/6$. Além disto, assuma que cada casal está acompanhado com i crianças com probabilidade p_i, onde

$$p_0 = p_1 = \frac{1}{4}, \quad p_2 = 13 \quad p_3 = 16.$$

Calcule:

(a) o número médio de pessoas sozinhas que chegam em um período de 1 hora;

(b) o número médio de casais que chega em um período de 1 hora e 30 minutos;

(c) a probabilidade de que dois casais cheguem antes do que uma pessoa sozinha;

(d) o número médio de crianças que entra na agência nos primeiros 25 minutos;

(e) a probabilidade de que cheguem pelo menos 2 homens sozinhos nos primeiros 30 minutos, dado que chegaram 10 pessoas sozinhas e 2 casais durante a primeira hora;

(f) o número médio de pessoas, adultos e crianças, que chega na agência de $14h00$ a $16h30$.

24. Camila recebe mensagens de SMS desde as $10h00$ a uma taxa de 10 mensagens por hora de acordo com um processo de Poisson. Calcule a probabilidade de que ela receberá exatamente 20 mensagens até as $14h00$ e exatamente 80 mensagens até as $17h00$.

25. Considere um processo de Poisson bi-dimensional de parâmetro $\lambda = 3$. Calcule:

(a) a probabilidade de que a bola $B(\mathbf{x}, 1.5)$ centrada no ponto $\mathbf{x} = (2, -3)$ e de rádio 1.5 contenha exatamente 2 pontos;

(b) a probabilidade de que exista pelo menos um ponto do processo na região Λ dada por:

$$\Lambda := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < x^2\};$$

(c) a probabilidade de que existam pelo menos três pontos do processo na região Θ dada por:

$$\Theta := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 < x < 0, 0 < y < -4x\};$$

(d) o número médio de pontos do processo contidos em $B(\mathbf{x}, 1.5) \cup \Lambda \cup \Theta$.

26. Clientes chegam em uma loja começando desde as $9h00$ e de acordo com um processo de Poisson não homogêneo com função intensidade $\lambda(t) = t^2$, para $t > 0$, onde o tempo é contado em horas. Encontre a função de probabilidade do número de clientes que chega na loja até $12h00$.