Aula 15: Esperança

Disciplina: PGE950 - Probabilidade

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE

Prof. Pablo M. Rodriguez

http://www.pablo-rodriguez.org

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo desta aula

- Esperança matemática: propriedades e exemplos.

Teorema 15.1

Sejam $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ *e* $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ *independentes. Então*

$$U = \frac{X}{Y}$$

tem densidade dada por

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < \infty. \tag{1}$$

Observação!

Uma variável aleatória U *tem distribuição de Cauchy padrão se sua densidade é dada por* (1). *Em geral, a distribuição de Cauchy com parâmetros* α *e* β *é dada pela densidade* $f(x) = \dfrac{1}{\pi\beta\left(1+\left\{\frac{x-\alpha}{\beta}\right\}^2\right)}$, *para* $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração do Teorema 15.1. Primeiro usamos o método do Jacobiano para encontrar a densidade conjunta de:

$$U = g_1(X, Y) = \frac{X}{Y} \quad \text{e} \quad V = g_2(X, Y) = Y$$

onde usamos $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Note que

$$P((X, Y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) = 1.$$

Logo U e V assumem valores em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Como

$$\begin{cases} u = g_1(x, y) = \dfrac{x}{y}, \\ v = g_2(x, y) = y \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = h_1(u, v) = uv, \\ y = h_2(u, v) = v \end{cases}$$

$$\text{temos que } J(u, v) = \det \begin{bmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = v \neq 0.$$

... continuação da prova do Teorema 15.1. Pelo método do Jacobiano temos:

$$f_{U,V}(u,v) = v\, f_{X,Y}(h_1(u,v), h_2(u,v)).$$

Então,

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{2\pi} v e^{-(1+u^2)v^2/2}, \quad u \in \mathbb{R} \text{ e } v \in \mathbb{R},$$

e a prova é finalizada fazendo $f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u,v)\, dv.$

Esperança de uma v.a. discreta

A esperança de uma v.a. discreta X, com valores em $\mathcal{S}$ e função de probabilidade $p(x)$, é dada por

$$E(X) := \sum_{x \in \mathcal{S}} x\, p(x) = \sum_{x \in \mathcal{S}: x<0} x\, p(x) + \sum_{x \in \mathcal{S}: x \geq 0} x\, p(x),$$

... desde que pelo menos uma das somas seja finita. Caso contrário, dizemos que a esperança de X não existe.

Observação!

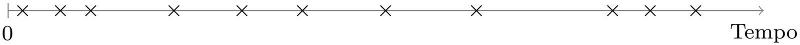
Note que ambas as somas são finitas se $\sum_{x \in \mathcal{S}} |x|\, p(x) < \infty$.

- Se $X \sim Poisson(\lambda)$ então

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n \left\{ e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \right\} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda.$$

Observação!

Considere um Processo de Poisson de parâmetro λ:



Qual o papel de λ?

Lembre que $N(a,b) \sim Poisson(\lambda(b-a))$.

Exemplo 15.1

Seja X uma variável aleatória discreta com valores em $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tal que

$$p(i) = \frac{C}{i^2}, \quad i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad com\ C = \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \right\}^{-1}.$$

Então $E(X)$ não existe pois:

$$-\sum_{i \in \mathbb{Z}_-} i\, p(i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}_+} i\, p(i) = C \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$$

Esperança de uma v.a. continua

A esperança de uma v.a. continua X, com densidade $f(x)$, é dada por

$$E(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} x\, f(x)\, dx + \int_{0}^{+\infty} x\, f(x)\, dx,$$

... desde que pelo menos uma das integrais seja finita. Caso contrário, dizemos que a esperança de X não existe.

Observação!

Note que ambas as integrais são finitas se $\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f(x)\, dx < \infty$.

- Se $X \sim Gama(\alpha, \lambda)$ então

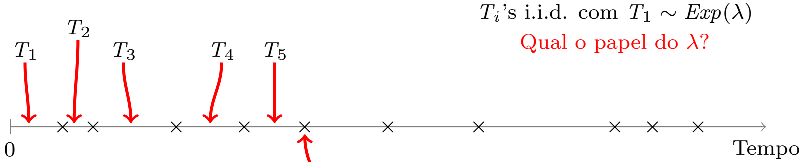
$$E(X) = \int_0^{\infty} x \left\{ \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} \right\} dx = \frac{1}{\lambda \Gamma(\alpha)} \underbrace{\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{\alpha} dx}_{=\Gamma(\alpha+1)}$$

e portanto $E(X) = \dfrac{\alpha}{\lambda}$.

- Se $\alpha = 1$ então $X \sim Exp(\lambda)$ e $E(X) = 1/\lambda$.

Observação!

Voltando ao Processo de Poisson de parâmetro λ:



$$S_5 = \sum_{i=1}^{5} T_i \sim (5, \lambda)$$

Exemplo 15.2

Seja X uma variável aleatória Cauchy padrão. Isto é, com densidade:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < \infty. \tag{2}$$

Então $E(X)$ não existe. De fato,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)}\,dx = \int_{0}^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)}\,dx + \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{\pi(1+x^2)}\,dx$$

mas

$$-\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{\pi(1+x^2)}\,dx = \int_{0}^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{1}^{\infty} \frac{dt}{t} = \infty$$

$$t = 1 + x^2$$

A esperança como uma integral

Se X é uma variável aleatória com função de distribuição F, então:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x),$$

quando a integral imprópria de Riemann-Stieltjes está bem definida.

Integral de Riemann-Stieljes

Se φ é continua e definida em $[a, b]$ e F é uma função de distribuição, então

$$\int_a^b \varphi(x) dF(x) := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \varphi(y_i)(F(x_{i+1}) - F(x_i)), \text{ onde } a = x_1 < \cdots < x_n = b$$

definem uma partição de $[a, b]$, $y_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $\max_i\{x_{i+1} - x_i\} \to 0$ *se* $n \to \infty$.

Além disto, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dF(x) := \lim_{\substack{a\to\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b \varphi(x) dF(x)$, *se o limite existe.*

Proposição 15.1

$$E(X) = \int_0^{\infty} (1 - F(x))dx - \int_{-\infty}^{0} F(x)dx$$

Prova. Ver Proposição 3.1 do livro de Barry James.

Corolário 15.1

Se $X \geq 0$ *então* $E(X) = \displaystyle\int_0^{\infty} P(X > x)dx.$

Corolário 15.2

Se X *assume valores inteiros não-negativos:* $E(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n).$

- Se $X \sim Exp(\lambda)$ então

$$E(X) = \int_0^\infty P(X > x)\,dx = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}$$

- Se $X \sim Geom(p)$ então

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n = \frac{1}{p}.$$

Propriedades

Observação!

No que segue, consideramos variáveis aleatórias tais que sua esperança existe.

1. Se $X = c$ então $E(X) = c$.

   Prova. Como X é discreta temos que $E(X) = cP(X = c) = c$.

2. Se $X \leq Y$ então $E(X) \leq E(Y)$.

   Prova. Como $\{Y \leq a\} \subset \{X \leq a\}$ então $F_Y(a) \leq F_X(a)$. Da Prop.15.1 temos:

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^{\infty} (1 - F_Y(a))da - \int_{-\infty}^{0} F_Y(a)da \\ &\geq \int_0^{\infty} (1 - F_X(a))da - \int_{-\infty}^{0} F_X(a)da \\ &= E(X). \end{aligned}$$

Propriedades

3. **Linearidade.**

$$E(c\,X + Y) = c\,E(X) + E(Y),$$

se c é uma constante, quando os termos à direita tem sentido.

Em geral, se $X_1, \ldots, X_n$ são v.a. e $c_1, \ldots, c_n$ são constantes, então:

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i E(X_i).$$

Prova. Será realizada após considerar a esperança de uma função de um vetor aleatório.

Exemplo 15.3

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *i.i.d. com função de distribuição* F *e seja* $\mu := E(X_1)$*. Dizemos que esta sequência é uma amostra de* F *e*

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots X_n}{n}$$

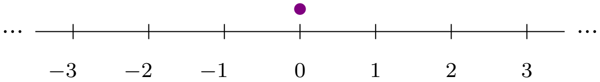
é a média amostral pois

$$E\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n} E\left(X_1 + \cdots + X_n\right) = \frac{E(X_1) + \cdots + E(X_n)}{n}$$

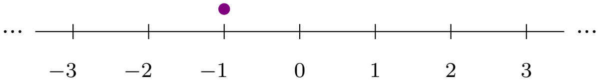
e portanto

$$E(\bar{X}) = \mu.$$

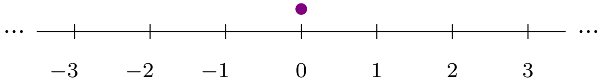
O passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



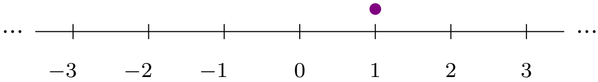
O passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



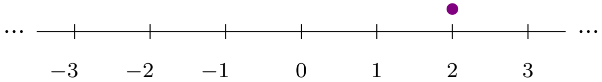
O passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



O passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



O passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



O passeio aleatório em $\mathbb{Z}$

Exemplo 15.4

A cada passo, independentemente, a partícula pula à direita com probabilidade p, ou à esquerda com probabilidade $1-p$. Definimos:

$$Y_n = \text{ posição da partícula logo após o } n-\text{ésimo pulo},$$

para $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, e supomos que $Y_0 = 0$. Podemos escrever

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

onde $X_1, X_2, \ldots$ são v.a. i.i.d. tais que

$$P(X_i = 1) = p = 1 - P(X_i = -1).$$

... continuação do Exemplo 15.4. Note que

$$E(Y_n) = E(X_1 + X_2 + \cdots X_n) = n\,E(X_1) = n\,(2p-1).$$

Logo,

- se $p = 1/2$ então $E(Y_n) = 0$ para todo n;
- se $p = 1/2 + \epsilon$ com $\epsilon > 0$ então $E(Y_n) = 2\epsilon n \to \infty$;
- se $p = 1/2 - \epsilon$ com $\epsilon > 0$ então $E(Y_n) = -2\epsilon n \to -\infty$.

Soma de variáveis aleatórias indicadoras e esperança

Proposição 15.2

Se $A_1, \ldots, A_n$ são eventos aleatórios, então $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Prova. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ seja

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se o evento } A_i \text{ ocorrer,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Então

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{3}$$

... continuação da prova da Prop.15.2. Por outro lado, se

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{se } X \geq 1, \\ 0, & \text{caso contrário}, \end{cases}$$

então $P(X \geq Y) = 1$ e portanto

$$E(X) \geq E(Y). \tag{4}$$

Mas

$$E(Y) = P(Y = 1) = P(X \geq 1) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right). \tag{5}$$

De (3), (4) e (5) obtemos o resultado.

Bom estudo!