Lista 2 • Cadeias de Markov a tempo continuo
ET658 - Processos Estocásticos
Prof. Pablo Martín Rodríguez

---

1. Considere o modelo de filas M/M/2. Isto é, há dois servidores no sistema, clientes chegam de acordo a um processo de Poisson de parâmetro λ e os respectivos tempos de serviço são variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial de parâmetro μ.
   (a) Escreva esse modelo como um processo de nascimento e morte identificando as taxas $\{\lambda_i\}_{i\geq 0}$ e $\{\mu_i\}_{i\geq 1}$.
   (b) Escreva as equações de balanço.

2. Considere um sistema com dois servidores, 1 e 2. Suponha que clientes chegam ao sistema de acordo a um processo de Poisson de parâmetro λ, e suponha que um potencial cliente entra no sistema somente se ambos servidores estão vazios. Quando um cliente entra, vai primeiro ao servidor 1 e, depois de ser atendido lá, passa ao servidor 2. Suponha que os tempos de serviço são variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial de parâmetros μ_1 e μ_2, respectivamente. Considere a cadeia de Markov a tempo contínuo com os três possíveis estados: 0 (sistema vazio), 1 (um cliente no servidor 1) e 2 (um cliente no servidor 2).
   (a) Esta CMTC é um processo de nascimento e morte? Justifique.
   (b) Escreva as equações de balanço para esta cadeia.
   (c) Encontre as probabilidades limites em função de λ, μ_1 e μ_2.

3. Considere o modelo de filas M/M/1 com capacidade máxima de um cliente na fila. Isto é, há um servidor no sistema, clientes chegam de acordo a um processo de Poisson de parâmetro λ e os tempos de serviço são variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial de parâmetro μ. Por outro lado suponha que um potencial cliente não entra no sistema caso encontre um cliente na fila. Escreva as equações de balanço para esta cadeia e encontre as probabilidades limites em função de λ e μ.

4. Considere o modelo de filas M/M/2 com capacidade finita. Suponha que o sistema tem capacidade máxima de 4 clientes (isto é, 2 na fila e 2 nos servidores).
   (a) Escreva esse modelo como um processo de nascimento e morte identificando as taxas.
   (b) Escreva as equações de balanço.
   (c) Encontre as probabilidades limites.

5. Seja $(X_t)_{t\geq 0}$ um processo de nascimento e morte com taxas $\lambda_n = \lambda$ para todo $n \geq 0$ e $\mu_n = 0$ para todo $n \geq 1$. Encontre uma expressão para $P_{ij}(t)$.

6. Suponha que uma partícula se divide ou desaparece. Cada partícula se divide, após um tempo exponencialmente distribuído de parâmetro α, em duas com probabilidade p ou em 4 com probabilidade $1-p$. Por outro lado, cada partícula desaparece após um tempo exponencialmente distribuído de parâmetro β. Seja X_t o número de partículas no instante de tempo t, para $t \geq 0$.
   (a) Escreva o conjunto de estados e os parâmetros da CMTC $(X_t)_{t\geq 0}$.
   (b) Esta cadeia é um processo de nascimento e morte? Justifique.

7. Uma central de SAC recebe ligações de acordo a um processo de Poisson de parâmetro 6. Suponha que

   - o SAC tem somente dois atendentes;
   - cada tempo de atendimento é exponencial de parâmetro 2;
   - caso ambos atendentes estejam ocupados, a central permite apenas um total de 4 ligações adicionais em espera.

   (a) Escreva este processo como um processo de nascimento e morte identificando as taxas.

   (b) Escreva as equações de balanço.

   (c) Calcule o número médio de ligações em espera para ser atendidas.

8. Seja $(X_t)_{t\geq 0}$ um processo de nascimento e morte com taxas: $\lambda_n = 2$ para $0 \leq n \leq 3$ e $\lambda_n = 0$ para $n \geq 4$; $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 2$ e $\mu_n = 0$ para todo $n > 4$. Encontre $\lim_{t\to\infty} P_{12}(t)$.

9. Um estabelecimento de engraxar sapatos tem duas cadeiras: cadeira 1 e cadeira 2. Um novo cliente chega na cadeira 1 onde seus sapatos são limpos e a graxa é aplicada. Depois, o cliente vai para a cadeira 2 onde a graxa é polida. Suponha que os tempos de serviço em cada cadeira são variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial de parâmetro μ_1 e μ_2, respectivamente. Suponha que potenciais clientes chegam ao estabelecimento de acordo a um processo de Poisson de parâmetro λ. Além disto, suponha que um potencial cliente entrará somente se ambas as cadeiras estiverem vazias. Defina uma cadeia de Markov a tempo contínuo apropriada para descrever este problema, identifique os possíveis estados e encontre seus parâmetros.