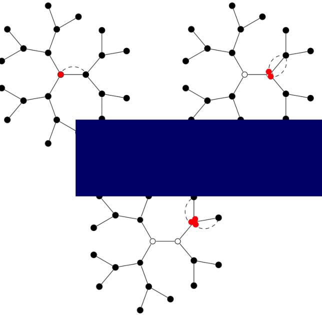
PGE977 - Tópicos Especiais em Processos Estocásticos

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE



REVISÃO DE PASSEIOS ALEATÓRIOS!

Prof. Pablo M. Rodriguez
https://www.pablo-rodriguez.org

Universidade Federal de Pernambuco
CCEN
Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo

- Passeios aleatórios: revisão.

Transiência do P.A.S. em $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$

O P.A.S. em $\mathbb{Z}^3$ é a cadeia de Markov $(Y_n)_{n\geq 0}$ com estados em $\mathbb{Z}^3$ e probabilidades de transição dadas por: para $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{Z}^3$

$$p(u,v) = \begin{cases} \dfrac{1}{6}, & \text{se } v \in \{(u_1, u_2 \pm 1, u_3), (u_1 \pm 1, u_2, u_3), (u_1, u_2, u_3 \pm 1)\}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Sabemos que o P.A.S. em $\mathbb{Z}^3$ é transiente!

Se denotamos $\mathbf{0} = (0,0,0)$, temos que $p_{2n-1}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = 0$, $n \geq 1$ e

$$p_{2n}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = \sum_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ i+j+k=n}} \frac{(2n)!}{i!\, i!\, j!\, j!\, k!\, k!} \left(\frac{1}{6}\right)^{2n}, \text{ para } n \geq 1.$$

Por outro lado, como

$$\sum_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ i+j+k=n}} \frac{(2n)!}{i!\, i!\, j!\, j!\, k!\, k!} = \binom{2n}{n} \sum_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ i+j+k=n}} \binom{n}{i,j,k}^2$$

temos

$$p_{2n}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \sum_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ i+j+k=n}} \left\{ \binom{n}{i,j,k} \left(\frac{1}{3}\right)^{n} \right\}^2.$$

Note que

$$\sum_{\substack{i,j,k\geq 0\\ i+j+k=n}} \left\{ \binom{n}{i,j,k} \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\}^2 \leq \underbrace{C_{n,3}}_{\text{máximo dos coeficientes}} \left(\frac{1}{3}\right)^n \left\{ \underbrace{\sum_{\substack{i,j,k\geq 0\\ i+j+k=n}} \binom{n}{i,j,k} \left(\frac{1}{3}\right)^n}_{=1} \right\},$$

A soma é igual a um pois no experimento de distribuir ao acaso n bolas distintas em 3 urnas distintas, temos que, para $i, j, k \geq 0$ com $i + j + k = n$, então

$$\binom{n}{i,j,k} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

é a probabilidade de que i, j e k bolas sejam colocadas, respectivamente, na primeira, segunda e terceira urna.

Portanto, conseguimos

$$p_{2n}(\mathbf{0},\mathbf{0}) \leq \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} C_{n,3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}.$$

Fazendo $n = 3m$, temos que

$$\binom{3m}{i\,j\,k} \leq \left(\frac{(3m)!}{m!\,m!\,m!}\right) \tag{1}$$

para todo i, j, k tal que $i + j + k = 3m$. De fato, fixe i, j, k e sem perda de generalidade suponha que $i < m$ e que $j \geq m + 1$. Note que $i + 1 < j$ e assim:

$$\binom{3m}{i\,j\,k} = \frac{(3m)!}{i!\,j!\,k!} \leq \left\{\frac{j}{i+1}\right\}\left\{\frac{(3m)!}{i!\,j!\,k!}\right\} \leq \frac{(3m)!}{(i+1)!\,(j-1)!\,k!}.$$

Repetidas realizações deste argumento nos leva à desigualdade (1).

Logo,

$$p_{6m}(\mathbf{0},\mathbf{0}) \leq \binom{6m}{3m}\left(\frac{1}{2}\right)^{6m}\left(\frac{(3m)!}{m!\,m!\,m!}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{3m} \sim \frac{1}{(m\pi)^{3/2}}.$$

Como $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{3/2}} < \infty$, então $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} p_{6m}(\mathbf{0},\mathbf{0}) < \infty$. Além disto, note que

$$p_{6m}(\mathbf{0},\mathbf{0}) \geq \left(\frac{1}{6}\right)^{2} p_{6m-2}(\mathbf{0},\mathbf{0}) \quad \text{e} \quad p_{6m}(\mathbf{0},\mathbf{0}) \geq \left(\frac{1}{6}\right)^{4} p_{6m-4}(\mathbf{0},\mathbf{0}).$$

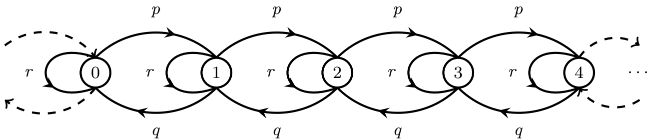
Portanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_{2n}(\mathbf{0},\mathbf{0}) < \infty$.

O passeio aleatório preguiçoso em $\mathbb{Z}$

É a cadeia C.M.T.D. $\{X_n\}_{n\geq 0}$ com $\mathcal{S} = \mathbb{Z}$ e probabilidades de transição:

$$p(i,j) = \begin{cases} p, & \text{se } j = i+1, \\ r, & \text{se } j = i, \\ q, & \text{se } j = i-1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

Supomos $p > 0$, $r > 0$ e $q > 0$. Note que deve ser $p + r + q = 1$.



Se definimos, para cada $i \geq 1$, as variáveis aleatórias

$$T_1 := \inf\{n > 0 : X_n \neq X_{n-1}\},$$

$$T_i := \inf\{n > T_{i-1} : X_n \neq X_{n-1}\}, \text{ para } i \geq 2,$$

então, o processo estocástico $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ tal que, para cada $k \geq 0$

$$Y_k := X_{T_k}$$

é um passeio aleatório em $\mathbb{Z}$ com probabilidades de transição:

$$p(i,j) = \begin{cases} \dfrac{p}{p+q}, & \text{se } j = i+1, \\ \dfrac{q}{p+q}, & \text{se } j = i-1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ é recorrente $\iff$ $\{X_n\}_{n\geq 0}$ é recurrente.

Transiência do P.A.S. em $\mathbb{Z}^4$

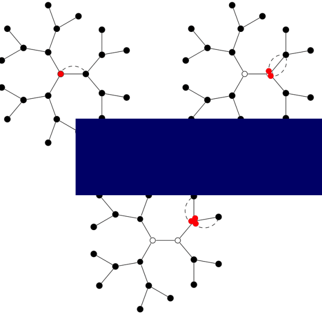
O P.A.S. em $\mathbb{Z}^4$ pode ser acoplado com um P.A. preguiçoso em $\mathbb{Z}^3$ $\{X_n\}_{n\geq 0}$ tal que: para $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{Z}^3$

$$p(u,v) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & \text{se } v \in \{(u_1, u_2 \pm 1, u_3), (u_1 \pm 1, u_2, u_3), (u_1, u_2, u_3 \pm 1)\}, \\ \frac{2}{8}, & \text{se } v = (u_1, u_2, u_3), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como no caso unidimensional, podemos concluir que $\{X_n\}_{n\geq 0}$ é transiente se, e somente se, o respectivo $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ é transiente. Mas neste caso, $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ é o P.A.S. em $\mathbb{Z}^3$.

Observação

O P.A. preguiçoso aparece na literatura em inglês como lazy random walk.



Bom estudo!

Prof. Pablo M. Rodriguez

https://www.pablo-rodriguez.org

e-mail: pablo@de.ufpe.br