Aula 11: Independência

Disciplina: PGE950 - Probabilidade

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE

Prof. Pablo M. Rodriguez

http://www.pablo-rodriguez.org

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN
Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo desta aula

- Independência.
- Exemplos e critérios.

Independência

Definição 11.1

X e Y são independentes se, para quaisquer $A, B \subset \mathcal{B}$, vale que

$$P\left(X \in A, Y \in B\right) = P(X \in A)P(Y \in B).$$

Isto é, X e Y são independentes se para quaisquer $A, B \subset \mathcal{B}$ os eventos

$$\mathcal{E}_A := \{X \in A\}$$

e

$$\mathcal{E}_B := \{Y \in B\}$$

são independentes.

Independência

X e Y são independentes se, e somente se,

- $F(a, b) = F_X(a) \cdot F_Y(b)$, para todo a, b;
- $p(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$ para todo x, y (caso discreto);
- $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ para todo x, y (caso continuo).

Exemplo 11.1

- *Suponha que o número de pessoas que entra em uma Agência dos Correios em certo dia seja uma v.a. Poisson*(λ)
- *e que cada nova pessoa que entra será um homem com probabilidade* p *ou uma mulher com probabilidade* $1-p$*, independentemente do sexo das outras pessoas que entraram.*
- *Então o número de homens e de mulheres que entra na agência em certo dia são v.a. independentes de Poisson com parâmetro* $\lambda\, p$ *e* $\lambda\,(1-p)$*, respectivamente.*

Exemplo 11.2

Considere o quadrado unitário e escolha ao acaso um ponto em seu interior. Sejam X e Y as coordenadas do ponto escolhido, e

$$X_1 = X^2, \;\; X_2 = Y^2, \;\; X_3 = X + Y.$$

Verifique que X_1 e X_2 são independentes, mas X_1 e X_3 não.

... continuação do Exemplo 11.2. Note que

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\ \ 0<y<1\\ 0, & \text{caso contrário.}\end{cases}$$

Portanto, $X \sim U(0,1)$ e $Y \sim U(0,1)$. Logo, se $F_i(x) := P(X_i \leq x)$, para $i \in \{1,2,3\}$, temos que

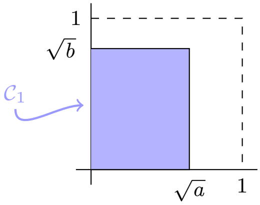
$$F_i(x)=\begin{cases}0, & \text{se } x<0\\ \sqrt{x}, & \text{se } 0\leq x\leq 1\\ 1, & \text{se } x>1,\end{cases}$$

para $i \in \{1,2\}$.

... continuação do Exemplo 11.2. Por outro lado,

$$F_{12}(a,b) = P(X^2 \le a,\, Y^2 \le b) = \iint_{\mathcal{C}_1} dx\, dy = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = F_1(a)F_2(b)$$

onde $\mathcal{C}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x, y < 1, x \le \sqrt{a}, y \le \sqrt{b}\}$.



... continuação do Exemplo 11.2. Para estudar a independência ou não de X_1 e X_3, note que se

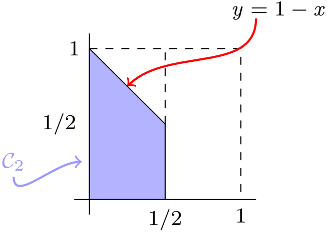
$$F_{13}(a, b) := P(X_1 \leq a, X_3 \leq b)$$

então, tomando $a = 1/4$ e $b = 1$, temos que

$$F_{13}(1/4, 1) = P(X^2 \leq 1/4, X + Y \leq 1) = \iint_{\mathcal{C}_2} dx\, dy = Area(\mathcal{C}_2),$$

onde $\mathcal{C}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x, y < 1, x \leq 1/2, y \leq 1 - x\}$.

... continuação do Exemplo 11.2. Neste caso,



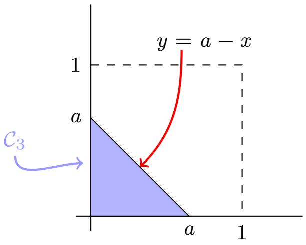
e portanto

$$F_{13}(1/4, 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

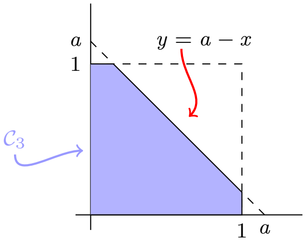
... continuação do Exemplo 11.2. Para finalizar calculamos

$$F_3(a) := P(X_3 \leq a) = P(X + Y \leq a) = \iint_{\mathcal{C}_3} dx\, dy = Area(\mathcal{C}_3)$$

onde $\mathcal{C}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x, y < 1, y \leq a - x\}$. Note que,



Se $0 < a < 1$.



Se $1 \leq a \leq 2$.

... continuação do Exemplo 11.2. Portanto

$$F_3(a) = \begin{cases} 0, & a \leq 0 \\ \frac{a^2}{2}, & 0 \leq a \leq 1 \\ 1 - \frac{(2-a)^2}{2}, & 1 \leq a \leq 2 \\ 1, & a \geq 2 \end{cases}$$

Como

$$F_1(1/4)F_3(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq F_{13}(1/4, 1)$$

então X_1 e X_3 não são independentes.

Critério de independência

Proposição 11.1

X e Y são independentes se, e somente se, existirem funções h e g, definidas nos reais, tais que

$$f(x, y) = h(x) \cdot g(y), \quad x, y \in \mathbb{R}, \qquad (\textit{se } X \textit{ e } Y \textit{ são continuas}),$$

ou

$$p(x, y) = h(x) \cdot g(y), \quad x, y \in \mathbb{R}, \qquad (\textit{se } X \textit{ e } Y \textit{ são discretas}).$$

Prova da Proposição 11.1. Vamos provar o caso continuo.

($\Rightarrow$) Suponha que X e Y são independentes. Então,

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y),$$

onde f_X e f_Y são as densidades marginais de X e Y respectivamente.
Basta tomar

$$h(x) = f_X(x)$$

e

$$g(y) = f_Y(y).$$

... continuação da prova da Proposição 11.1. ($\Leftarrow$) Suponha que existem funções h e g tais que

$$f(x,y) = h(x)\cdot g(y), \tag{1}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Então,

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\cdot g(y)\,dx\,dy$$

e portanto

$$1 = C_1 \cdot C_2 \tag{2}$$

onde $C_1 := \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx$ e $C_2 := \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\,dy$.

... continuação da prova da Proposição 11.1. Por outro lado,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\cdot g(y)\,dy = h(x)\cdot C_2 \tag{3}$$

e da mesma forma, que

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\cdot g(y)\,dx = g(y)\cdot C_1. \tag{4}$$

Assim, temos de (2), (3), (4) e da hipótese que

$$f_X(x)\cdot f_Y(y) = (h(x)\cdot C_2)\,(g(y)\cdot C_1) = f(x,y).$$

Exemplo 11.3

Suponha que as variáveis aleatórias X e Y têm função densidade conjunta dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}\, e^{-x^2/2}\, e^{-y^2/8} & -\infty < x < \infty, \ \ -\infty < y < \infty, \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

… continuação do Exemplo 11.3. Neste caso, definindo a função

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$$

para $x \in \mathbb{R}$; e a função

$$g(y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\, e^{-y^2/8}$$

para $y \in \mathbb{R}$, concluímos que

$$f(x, y) = h(x) \cdot g(y).$$

Logo X e Y são independentes. Note que $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ e $Y \sim \mathcal{N}(0, 4)$.

Exemplo 11.4

Suponha que as v.a. X e Y têm densidade conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 24\,x\,y & 0 < x < 1,\, 0 < y < 1,\, 0 < x + y < 1, \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

... continuação do Exemplo 11.4. Neste caso, note que podemos re-escrever

$$f(x, y) = 24\, x\, y\, I(x, y)$$

para $x, y \in \mathbb{R}$, onde

$$I(x, y) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ 0 < x + y < 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, $f(x, y)$ não pode ser fatorada e X e Y não são independentes.

Em geral

- $X_1, X_2, \ldots X_n$ são independentes se, para todo $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$, os eventos $\{X_1 \in A_1\}, \ldots, \{X_n \in A_n\}$ são independentes.
- Uma coleção infinita $X_1, X_2, \ldots$ é uma coleção de variáveis aleatórias independentes se cada sub-coleção finita destas variáveis, for de variáveis aleatórias independentes.

Exemplo 11.5

Sejam X, Y *e* Z *i.i.d. com* $X \sim U(0,1)$. *Vamos calcular*

$$P(X \geq YZ).$$

Para isto, notamos que a densidade conjunta destas v.a. é dada por

$$f(x,y,z) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \cdot f_Z(z) = 1$$

para $0 < x, y, z < 1$ *e* $f(x,y,z) = 0$ *caso contrário. Então,*

$$P(X \geq YZ) = \iiint_{\mathcal{C}} dx\, dy\, dz$$

onde

$$\mathcal{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x, y, z < 1, x \geq yz\}.$$

... continuação do Exemplo 11.5. Então,

$$P(X \geq YZ) = \int_0^1 \int_0^1 \int_{yz}^1 dx\, dy\, dz = \int_0^1 \int_0^1 (1 - yz)\, dy\, dz$$

e

$$\int_0^1 \int_0^1 (1 - yz)\, dy\, dz = \int_0^1 \left(1 - \frac{z}{2}\right)\, dz = \frac{3}{4}$$

Bom estudo!