

## Lista de exercícios 8

PGE950 - Probabilidade | PPGE - UFPE

Prof. Pablo M. Rodriguez

1° Semestre de 2020

---

### Exercícios:

1. Seja  $X$  uma variável aleatória com função de distribuição  $F$ . Se  $a_1 < a_2$  e  $b_1 < b_2$  mostre que

$$P(a_1 < X \leq a_2, b_1 < Y \leq b_2) = F(a_2, b_2) + F(a_1, b_1) - F(a_1, b_2) - F(a_2, b_1).$$

2. Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias e seja  $F$  sua função de distribuição conjunta. Mostre que:

(a)  $F(x, y)$  é não-decrescente em cada uma das suas variáveis;

(b)  $F(x, y)$  é contínua à direita em cada uma das suas variáveis;

(c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0$  e  $\lim_{\min\{x, y\} \rightarrow \infty} F(x, y) = 1$ .

3. Seja  $X$  uma variável aleatória contínua com densidade  $f$ . Se  $\Delta x \approx 0$  e  $\Delta y \approx 0$  mostre que

$$P(x < X \leq x + \Delta x, y < Y \leq y + \Delta y) \approx f(x, y) \Delta x \Delta y.$$

4. Sabe-se que um cesto com 5 transistores contém 2 com defeito. Os transistores devem ser testados, um de cada vez, até que os defeituosos sejam identificados. Suponha que  $X_1$  representa o número de testes feitos até que o primeiro transistor defeituoso seja identificado, e  $X_2$  o número de testes adicionais feitos até que o segundo transistor defeituoso seja identificado. Determine a função de probabilidade conjunta de  $X_1$  e  $X_2$ .

5. Se  $X$  e  $Y$  são duas variáveis aleatórias tais que

$$f(x, y) = \begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y}, & 0 < x < \infty, 0 < y < \infty, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule  $P(X < Y)$ .

6. Mostre que duas variáveis aleatórias discretas  $X$  e  $Y$  são independentes se, e somente se, existirem funções  $h$  e  $g$ , definidas nos reais, tais que  $p(x, y) = h(x) \cdot g(y)$ .

7. **Exercícios adicionais:** 18, 20, 21, 29, 33, 34 (do livro de Barry James, páginas 91 a 94).