Aula 17: Momentos e desigualdades

Disciplina: PGE950 - Probabilidade

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE

Prof. Pablo M. Rodriguez

http://www.pablo-rodriguez.org

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN
Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo desta aula

- Esperança da função de uma variável aleatória.
- Momentos.

Teorema 17.1

Se X é variável aleatória e φ é função real mensurável, então

$$E(\varphi(X)) := \int y dF_{\varphi(X)}(y) = \int \varphi(x) dF_X(x),$$

onde a existência de uma das integrais implica a existência da outra e a igualdade das duas.

Observação!

- *Se X é discreta então* $E(\varphi(X)) = \sum_{i \in S_X} \varphi(i) p_X(i)$.
- *Se X é continua então* $E(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx$.

Momentos

Se X é uma variável aleatória, $b \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$. Chamamos:

- $E((X-b)^k)$ de k-ésimo momento de X em torno de b;
- $E(X^k)$ de k-ésimo momento de X;
- $Var(X) = E(\{X - E(X)\}^2)$ de variância de X. Neste caso:

  $$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 \text{ (por linearidade da esperança).}$$
- $E(|X|^t)$ de t-ésimo momento absoluto de X, com $t > 0$.

Proposição 17.1

Seja X uma variável aleatória com função de distribuição F. Então

$$E(X^k) = k\left\{\int_0^{\infty} \{1 - F(x)\}\, x^{k-1}\, dx - \int_{-\infty}^{0} F(x)\, x^{k-1}\, dx\right\}, \quad para\ k \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 17.1

Seja $X \sim Exp(\lambda)$, então para $k \in \mathbb{N}$

$$E(X^k) = k \int_0^{\infty} x^{k-1}\, e^{-\lambda x}\, dx = \frac{k}{\lambda}\left\{\int_0^{\infty} x^{k-1}\, \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx\right\} = \frac{k}{\lambda} E(X^{k-1}).$$

$$\ldots\ e\ portanto\ E(X^k) = \frac{k!}{\lambda^k}.$$

Sobre variáveis integráveis

- Se $E(X)$ é finita dizemos que X é integrável;
- X é integrável se, e somente se, $E(|X|) < \infty$.
- X e Y tais que $|X| \leq Y$ e Y é integrável $\Longrightarrow$ X é integrável.

Critério de integrabilidade. Se X é uma variável aleatória, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n) \leq E(|X|) \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n).$$

Observação!

Como consequência: X é integrável se, e somente se $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n) < \infty$.

Prova da Prop. Para $x \geq 0$ seja $[x]$ sua parte inteira. Então

$$[|X|] = k \text{ quando } k \leq |X| < k+1,$$

e portanto $0 \leq [|X|] \leq |X| \leq [|X|] + 1$, que implica em:

$$0 \leq E([|X|]) \leq E(|X|) \leq E([|X|]) + 1.$$

Finalmente, note que $E([|X|]) = \sum_{n=1}^{\infty} P([|X|] \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n).$

Desigualdade de Jensen. Se X é integrável e φ é função convexa definida em $\mathbb{R}$ então

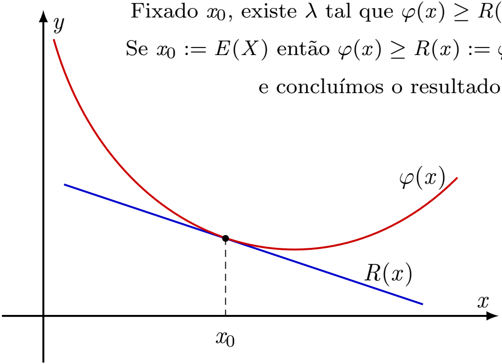
$$E(\varphi(X)) \geq \varphi(E(X)).$$

Prova.

Fixado x_0, existe λ tal que $\varphi(x) \geq R(x) := \varphi(x_0) + \lambda(x - x_0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Se $x_0 := E(X)$ então $\varphi(x) \geq R(x) := \varphi(E(X)) + \lambda(x - E(X))$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

e concluímos o resultado fazendo $x = E(X)$.



Exemplo 17.2

Algumas consequências da desigualdade de Jensen são:

- $|E(X)| \leq E(|X|)$;
- $E(X)^2 \leq E(X^2)$;
- $|E(X)|^p \leq E(|X|^p)$ $(p \geq 1)$.

Observação!

Se $P(X \in (a,b)) = 1$ *então é suficiente pedir que* φ *seja convexa em* (a,b).

Proposição 17.2

Se X é uma variável aleatória, então

$$f(t) := E(|X|^t)^{1/t}$$

é uma função não decrescente em t, para $t > 0$.

Prova. Seja $s \in (0, t)$ e $\varphi(y) := |y|^{t/s}$ (convexa). Se Y é integrável então:

$$|E(Y)|^{t/s} \leq E(|Y|^{t/s}).$$

Consideramos $Y := |X|^s$ e separamos em dois casos:

- $|X|^s$ integrável: então $|E(|X^s|)|^{t/s} \leq E(|X|^t) \implies f(s) \leq f(t)$.
- $|X|^s$ não é integrável: como $|X|^s \leq 1 + |X|^t$ então $E(|X|^s) = +\infty$ implica que $E(|X|^t) = +\infty$.

Em qualquer caso, temos $|E(|X^s|)|^{t/s} \leq E(|X|^t)$ se $0 < s < t$.

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN
Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Corolário 17.1

Se $E(|X|^t) < \infty$ *para algum* $t \in (0, \infty)$ *então* $E(|X|^s) < \infty$ *para todo* $s \in (0, t)$.

Mais propriedades de momentos:

- Se $X = c$, com c uma constante, então $Var(X) = 0$.

  Prova. Note que $E(X) = c$ então $Var(X) = E((X - c)^2) = 0$.

- $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$ para $a, b \in \mathbb{R}$.

  Prova.

$$
\begin{aligned}
Var(aX + b) &= E(\{aX + b - aE(X) - b)\}^2) \\
&= E(a^2 \{X - E(X)\}^2) \\
&= a^2 Var(X).
\end{aligned}
$$

Desigualdade básica de Tchebychev. Se $X \geq 0$ então para todo $a > 0$:

$$P(X \geq a) \leq \frac{1}{a}E(X).$$

Prova. Defina a variável aleatória

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{se } X \geq a, \\ 0, & \text{se } X < a. \end{cases}$$

Então $Y \leq \dfrac{X}{a}$ e assim

$$P(X \geq a) = P(Y = 1) = E(Y) \leq E\left(\frac{X}{a}\right) = \frac{1}{a}E(X).$$

Aplicações da desigualdade básica de Tchebychev

Desigualdade clássica de Tchebychev. Se X é integrável, então:

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}, \text{ para todo } a > 0.$$

Prova. Note que

$$\{|X - E(X)| \geq a\} = \{(X - E(X))^2 \geq a^2\}$$

e aplique a desigualdade básica de Tchebyshev.

Desigualdade de Markov. Se X é uma variável aleatória, então:

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|^t)}{a^t}, \text{ para todo } a > 0 \text{ e todo } t > 0.$$

Prova. $\{|X| \geq a\} = \{|X|^t \geq a^t\}$ e desigualdade básica de Tchebyshev.

Aplicações da desigualdade básica de Tchebychev

Outra aplicação: Se $X \geq 0$ e $E(X) = 0$ então $P(X = 0) = 1$.

Prova. Vamos provar que $P(X > 0) = 0$. Como

$$\{X > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{X \geq \frac{1}{n}\right\}$$

então

$$P(X > 0) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{X \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(X \geq \frac{1}{n}\right) = 0.$$

$$\left\{X \geq \frac{1}{n}\right\} \nearrow \qquad\qquad P\left(X \geq \frac{1}{n}\right) \leq \frac{E(X)}{1/n} = 0.$$

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Proposição 17.3

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias tais que $|X|^p$ e $|Y|^p$ são integráveis. Então $|X+Y|^p$ é integrável.

Prova. Como $|X+Y| \leq |X| + |Y| \leq 2\max\{|X|, |Y|\}$ temos que

$$|X+Y|^p \leq 2^p \max\{|X|^p, |Y|^p\} \leq 2^p(|X|^p + |Y|^p).$$

Isto é, $E(|X+Y|^p) \leq 2^p \left\{E(|X|^p) + E(|Y|^p)\right\}$.

Observação!

- $p = 1$: *Se X e Y são integráveis então $X+Y$ é integrável.*
- $p = 2$: *Se $Var(X) < \infty$ e $Var(Y) < \infty$ então $Var(X+Y) < \infty$.*

Bom estudo!