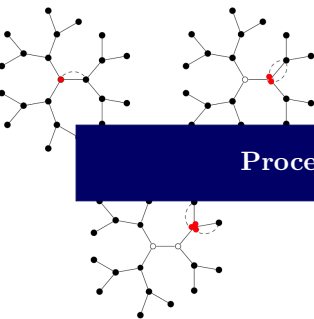


ET658 - Processos Estocásticos para Atuária

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE



Processos de Poisson: motivação e revisão

Prof. Pablo M. Rodriguez

<https://www.pablo-rodriguez.org/et658-processos-estocasticos>



UNIVERSIDADE
FEDERAL
DE PERNAMBUCO

CCEN

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
E DA NATUREZA

Conteúdo da Aula 11

- ▶ Distribuição de Poisson
- ▶ Distribuição exponencial
- ▶ Processo de Poisson



Distribuição de Poisson

X tem *distribuição de Poisson* com parâmetro $\lambda \in (0, \infty)$ se:

$$p(i) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!}, \text{ para } i \in \{0, 1, \dots\}.$$

Notação: $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

Observação!

X pode ser interpretada como uma aproximação para o número de sucessos obtidos quando n ensaios independentes de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p , são realizados, assumindo valores grandes de n e pequenos de p .



Soma

Se $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $Y \sim \text{Poisson}(\mu)$ e são independentes então:

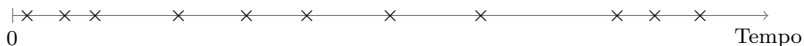
$$X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda + \mu).$$

$$\begin{aligned} P(X + Y = n) &= \sum_{i=0}^n P(\{X + Y = n\} \cap \{Y = i\}) \\ &= \sum_{i=0}^n P(\{X = n - i\} \cap \{Y = i\}) \\ &= \sum_{i=0}^n P(X = n - i)P(Y = i) \\ &= \sum_{i=0}^n \left\{ \frac{e^{-\lambda} \lambda^{n-i}}{(n-i)!} \right\} \left\{ \frac{e^{-\mu} \mu^i}{i!} \right\} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)} (\lambda + \mu)^n}{n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{n-i} \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^i \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)} (\lambda + \mu)^n}{n!}. \end{aligned}$$



Processo de Poisson de parâmetro λ

Um Processo de Poisson de parâmetro λ **unidimensional** pode ser representado como uma sequência de pontos ou marcas em \mathbb{R}^+ :



tais que, se $N(B) =$ número de pontos contidos no intervalo $B \subset \mathbb{R}^+$, então:

- ▶ $N(B) \sim \text{Poisson}(\lambda|B|)$;
- ▶ $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^+$ intervalos, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, então $N(B_1)$ e $N(B_2)$ são independentes.



Exemplo 11.1

Suponha que as ocorrências de um evento de interesse acontecem segundo um P.P.(10). Se $N(s, t)$ denota o número de ocorrências entre os instantes s e t , determine $P(N(0, 1) = 2 | N(0, 5) = 5)$.

Solução. Note que

$$P(N(0, 1) = 2 | N(0, 5) = 5) = \frac{P(\{N(0, 1) = 2\} \cap \{N(0, 5) = 5\})}{P(N(0, 5) = 5)},$$

e $N(0, 5) \sim \text{Poisson}(50)$: $P(N(0, 5) = 5) = e^{-50} \frac{50^5}{5!}$. Por outro lado,

$$\{N(0, 1) = 2\} \cap \{N(0, 5) = 5\} = \{N(0, 1) = 2\} \cap \{N(1, 5) = 3\}.$$

Então

$$P(\{N(0, 1) = 2\} \cap \{N(0, 5) = 5\}) = P(\{N(0, 1) = 2\})P(\{N(1, 5) = 3\}).$$



... continuação do Exemplo ??. Finalmente,

$$P(N(0, 1) = 2 | N(0, 5) = 5) = \frac{\left\{ e^{-10} \frac{10^2}{2!} \right\} \left\{ e^{-40} \frac{40^3}{3!} \right\}}{e^{-50} \frac{50^5}{5!}},$$

que reescrevendo é:

$$P(N(0, 1) = 2 | N(0, 5) = 5) = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right)^3.$$

Observação!

Para um P.P.(λ): dado que $N(0, t) = n$, as posições dos n pontos estão distribuídas em $(0, t)$ como n variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição $U(0, t)$.



Distribuição Exponencial

X tem *distribuição exponencial* com parâmetro $\lambda \in (0, \infty)$ se:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Notação: $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Observação!

Usualmente usada para descrever o tempo até a ocorrência de um evento de interesse.

Se $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ então $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.



Perda de memória

Proposição 11.1

Se $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ então

$$P(X > t + s | X > s) = P(X > t), \quad \text{para } s, t \in (0, \infty).$$

Prova. Note que

$$P(X > t + s | X > s) = \frac{P(\{X > t + s\} \cap \{X > s\})}{P(X > s)}$$

mas $\{X > t + s\} \subset \{X > s\}$, então

$$P(X > t + s | X > s) = \frac{P(X > t + s)}{P(X > s)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X > t).$$



Mínimo de exponenciais independentes

Proposição 11.2

Se X_1, \dots, X_n são independentes com $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, então

$$\min\{X_1, \dots, X_n\} \sim \text{Exp}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$$

Prova. Note que

$$P(\min\{X_1, \dots, X_n\} > a) = \prod_{i=1}^n P(X_i > a) = e^{-(\sum_{i=1}^n \lambda_i)a}.$$



“Competição” de exponenciais

Proposição 11.3

Se X_1 e X_2 são independentes com $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$, $i \in \{1, 2\}$, então

$$P(X_1 < X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Prova. Note que

$$\begin{aligned} P(X_1 < X_2) &= \int_0^{\infty} P(X_1 < X_2 | X_1 = t) \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} dt \\ &= \int_0^{\infty} P(X_2 > t) \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} dt \\ &= \int_0^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_1 t} dt \\ &= \int_0^{\infty} \lambda_1 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} dt \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}. \end{aligned}$$



Exemplo 11.2

Ocorrências de um evento de acordo com um $P.P.(\lambda)$. Se T_1 é o instante da primeira ocorrência então $T_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$. De fato, se

$$F_{T_1}(t) = P(T_1 \leq t),$$

como

$$\{T_1 > t\} = \{N(0, t) = 0\},$$

e $N(0, t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$, então

$$F_{T_1}(t) = 1 - P(T_1 > t) = 1 - P(N(0, t) = 0) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Observação!

Para um $P.P.(\lambda)$: se T_1, T_2, \dots são as distâncias entre um ponto e o seguinte ponto do processo então estas são *i.i.d.* com distribuição $T_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$.



Distribuição gama

X tem *distribuição gama* com parâmetros $\alpha \in (0, \infty)$ e $\lambda \in (0, \infty)$ se:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\alpha-1} dy$ (função gama).

Notação: $X \sim \text{Gama}(\alpha, \lambda)$.

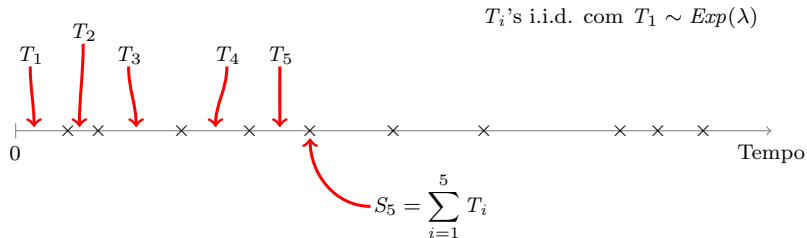
Observação!

$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$. Em particular, $\Gamma(n) = (n - 1)!$ se $n \in \mathbb{N}$.



Processo de Poisson

Lembre que:



Observação!

Se T_1, T_2, \dots, T_n são i.i.d. com $T_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$ então $\sum_{i=1}^n T_i \sim \text{Gama}(n, \lambda)$.



Referências



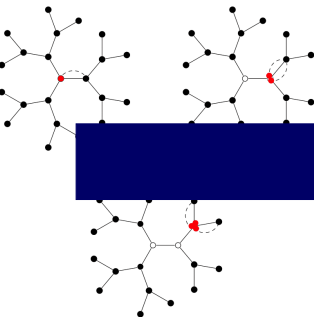
Sheldon M. Ross. Introduction to Probability Models. 10th ed.
Academic Press. 2010. (Capítulo 5)



UNIVERSIDADE
FEDERAL
DE PERNAMBUCO

CCEN

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
E DA NATUREZA



Bom estudo!

Prof. Pablo M. Rodriguez
<https://www.pablo-rodriguez.org>
e-mail: pablo@de.ufpe.br



UNIVERSIDADE
FEDERAL
DE PERNAMBUCO

CCEN

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
E DA NATUREZA