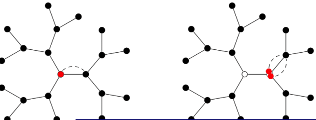
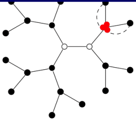
ET581 - Probabilidade 1

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE



Experimento aleatório. Espaço amostral. Evento.



Prof. Pablo M. Rodriguez

https://www.pablo-rodriguez.org/et581-probabilidade1

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo da Aula 8

- Experimento.
- Espaço amostral.
- Evento

Primeiros exemplos

Comecemos com dois exemplos de experimentos simples.

Exemplo 8.1

Soltamos uma bola de altura fixa conhecida e cronometramos o tempo que ela toma para chegar ao chão. Para evitar erros humanos, considere que todas as medidas e processos são feitos por máquinas de precisão muito alta.

Exemplo 8.2

Jogamos um dado, com 6 lados iguais, perfeitamente balanceado, sobre uma superfície plana. Após isto, anotamos o valor da face que aponta para cima.

Vamos analisar os dois exemplos e tentar compará-los.

- Exemplo 1:
  - Se soltarmos a bola sempre da mesma altura, o primeiro experimento nos devolverá sempre o mesmo resultado.
  - Podemos não saber de antemão qual resultado será esse, mas a cada vez que o experimento for repetido, o resultado será o mesmo.
- Exemplo 2:
  - Assim que o dado deixa nossa mão, perdemos o controle sobre o seu comportamento, e não temos como prever o resultado.
  - Cada vez que o experimento é repetido, o resultado pode ser potencialmente diferente, impondo uma incerteza grande ao resultado.

Tipos de experimentos

- O Exemplo 1 descreve um experimento onde o resultado final é sempre o mesmo, a cada vez que o repetimos. Dizemos então que este é um experimento determinístico.

- Já o Exemplo 2 descreve um experimento onde o resultado final é incerto, sendo potencialmente diferente a cada realização do experimento. Dizemos então que se trata de um experimento aleatório.

Tipos de experimentos

Definição 8.1

Chamaremos de Experimento Determinístico aquele cujo resultado final é bem determinado. Ou seja, um experimento que a cada repetição apresenta o mesmo resultado.

Definição 8.2

Chamaremos de Experimento Aleatório aquele cujo resultado final carregue incerteza, sendo potencialmente diferente a cada repetição do experimento.

Mais exemplos

- Abrir uma caixa com bolas pretas e vermelhas, e contar o total de bolas de cada cor é um experimento determinístico.
- Balançar a mesma caixa e, sem olhar, pegar uma bola, retirar da caixa e observar a cor é um experimento aleatório.
- Apurar em quem o vizinho votou na última eleição para síndico é um experimento determinístico.
- Sortear um número de apartamento e perguntar para o morador em quem ele votou na última eleição para síndico é um experimento aleatório.

Mais exemplos

- Abrir sempre o mesmo vídeo no YouTube e medir o tempo de duração é um experimento ao determinístico.
- Abrir o primeiro vídeo sugerido pelo Youtube, e medir seu tempo de duração é um experimento aleatório (cada vez que abrimos, a sugestão pode ter mudado e não temos controle sobre ela, impondo incerteza.)
- Medir o raio de um alvo de dardo circular (sempre o mesmo) é experimento determinístico.
- Lançar o dardo no alvo é medir a distância do ponto onde o dardo acertou até o centro é um experimento aleatório.

- Uma vez que localizamos a fonte das incertezas que queremos modelar, precisamos organizá-la.

- Para isso precisamos primeiro identificar os resultados possíveis deste experimento, e quaisquer subgrupos de resultados que nos interesse estudar.

Observação

A linguagem usada para o estudo da probabilidade é a da teoria de conjuntos.

Espaço amostral

Após identificar o experimento aleatório com o qual estamos trabalhando, passamos para a fase de identificar e agrupar os resultados possíveis do experimento.

- Ao conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório, daremos o nome de espaço amostral.
- Denotaremos o espaço amostral de um experimento por Ω;

Espaço amostral: exemplos

1. No experimento de determinar se uma pessoa sintomática está ou não infectada com um vírus, o espaço amostral pode ser escrito por
$$\Omega = \{\text{positivo, negativo}\}.$$
2. Um experimento que determina o tempo em horas que um medicamento começa a ter efeito, pode ter espaço amostral
$$\Omega = [0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}.$$
3. Se o experimento aleatório consiste em lançar duas moedas, verificando se as faces visíveis são *cara* (C) ou *coroa* ($\overline{C}$), o espaço amostral pode ser descrito por
$$\Omega = \{(C, C), (C, \overline{C}), (\overline{C}, C), (\overline{C}, \overline{C})\}.$$

Espaço amostral: exemplos

4. Se o experimento consiste em contar o total de peças defeituosas fabricadas por dia em uma fábrica de chinelos, podemos usar

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots, M\},$$

onde M é o total de chinelos fabricados em um dia.

5. Se estamos interessados no número de chamadas que passam em um dia por uma torre de comunicação de celular, então

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

6. Se o experimento aleatório consiste em escolher ao acaso um ponto em um círculo de raio 1, o espaço amostral pode ser

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Exercícios

1. Um experimento aleatório consiste em lançar uma moeda seguidamente até que observemos cara pela primeira vez. Que espaço amostral poderia ser usado para representar este experimento?

2. Em uma eleição com 5 candidatos, uma pesquisa eleitoral consiste em um experimento aleatório repetido uma quantidade grande de vezes. O experimento em questão é o de sortear um eleitor da população e perguntar sua intenção de voto. Descreva um espaço amostral adequado para o experimento.

Exemplo 8.3

Considere o experimento de rolar dois dados. O espaço amostral pode ser descrito como

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(6,5),(6,6)\} = \{(i,j) : i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\}.$$

Ω	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	*(1,1)*	*(1,2)*	*(1,3)*	*(1,4)*	*(1,5)*	*(1,6)*
2	*(2,1)*	*(2,2)*	*(2,3)*	*(2,4)*	*(2,5)*	*(2,6)*
3	*(3,1)*	*(3,2)*	*(3,3)*	*(3,4)*	*(3,5)*	*(3,6)*
4	*(4,1)*	*(4,2)*	*(4,3)*	*(4,4)*	*(4,5)*	*(4,6)*
5	*(5,1)*	*(5,2)*	*(5,3)*	*(5,4)*	*(5,5)*	*(5,6)*
6	*(6,1)*	*(6,2)*	*(6,3)*	*(6,4)*	*(6,5)*	*(6,6)*

... continuação do Exemplo 8.3. Suponha que estamos interessados nos resultados onde a soma é igual a 5. Estes resultados formam o subconjunto $A \subset \Omega$ dado por

$$A = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}.$$

Se estivermos interessados nos lançamentos onde o valor do primeiro dado é 1, teremos que trabalhar com o subconjunto $B \subset \Omega$

$$B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\}.$$

Eventos

- Os subconjuntos de um espaço amostral, para os quais estamos interessados em quantificar a incerteza, serão chamados de eventos.
- Dizemos que um evento $A \subset \Omega$ ocorreu ou foi observado quando o resultado da realização do experimento aleatório pertence a A.
- Assim, seguindo o Exemplo 8.3, se lançarmos dois dados conseguindo o resultado $(2, 3)$, podemos dizer que o evento

$$A = \{\text{a soma dos resultados é igual a } 5\}$$

foi observado, mas o evento

$$B = \{\text{o valor do primeiro dado é } 1\}$$

não ocorreu.

Operação com eventos

Considere eventos $A, B, A_1, A_2, \ldots \subset \Omega$.

- O evento $A \cup B$ representa o evento onde foi observado o evento A ou o evento B, indiscriminadamente;
- o evento $A_1 \cup A_2 \cup \cdots$ pode ser lido como ocorreu algum dos eventos $A_1, A_2, \ldots$;
- o evento $A \cap B$ representa o evento onde foram observados o evento A e o evento B;
- o evento $A_1 \cap A_2 \cap \cdots$ pode ser lido como todos os eventos $A_1, A_2, \ldots$ foram observados;
- o evento $A^c = \Omega - A$ (o evento complementar de A) também pode ser lido como o evento A não ocorreu.

Considere o Exemplo 8.3, e tome os eventos:

$$\begin{aligned} E &= \{\text{a soma dos resultados é igual a } 7\} \\ &= \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}, \end{aligned}$$

e

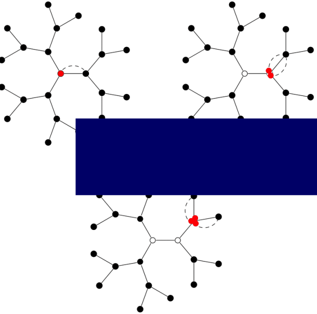
$$\begin{aligned} F &= \{\text{o valor do segundo dado é igual a } 5\} \\ &= \{(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5)\} \end{aligned}.$$

Neste caso temos:

- $E \cup F = \{$a soma dos resultados é 7 ou o segundo dado é 5$\}$;
- $E \cap F = \{$a soma é 7 e o segundo dado é 5$\} = \{(2,5)\}$;
- $E^c = \{$a soma dos resultados é diferente de 7$\}$.

Referência!

Ross, S. Probabilidade: Um curso moderno com aplicações, 8a ed., Bookman, 2010.



Bom estudo!