ET581 - Probabilidade 1

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

MOTIVAÇÃO. REVISÃO DE TEORIA DE CONJUNTOS

Prof. Pablo M. Rodriguez

https://www.pablo-rodriguez.org/et581-probabilidade1

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Resumo da aula

- Motivação: Teoria das probabilidades.

Resumo da aula

- Motivação: Teoria das probabilidades.
- Revisão de teoria de conjuntos.

Conjunto

- Um conjunto é uma coleção não ordenada de objetos.

Observação

Se a é um dos objetos do conjunto A dizemos que a é um elemento de A ou que a pertence a A. Neste caso denotamos: $a \in A$.

Exemplo 1.1

Alguns conjuntos:

1. *O conjunto dos números naturais:* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$.
2. *O conjunto dos números inteiros:* $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
3. *O conjunto dos racionais:* $\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0\}$.

- O conjunto universo, que denotamos Ω, é o conjunto contendo todos os objetos em consideração.

Exemplo 1.2

O conjunto dos números inteiros positivos menores que 7:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

ou

$$S = \{n \in \mathbb{Z} : n > 0 \ e \ n < 7\}$$

ou

$$S = \{n \in \mathbb{Z} : 0 < n < 7\}.$$

Note que:

- $2 \in S$;
- $7 \notin S$;
- $6 \in S$.

Igualdade e inclusão

- Dois conjuntos A e B são iguais se, e somente se, eles têm os mesmos elementos.

  Denotamos $A = B$.

- O conjunto A é um subconjunto de B se, e somente se, todo elemento de A for também um elemento de B.

  Denotamos: $A \subseteq B$.

Observação

Se $A \subseteq B$ mas $A \neq B$ denota-se: $A \subset B$ (A é um subconjunto estrito de B).

⚠ Alguns livros usam $A \subset B$ para denotar $A \subseteq B$.

Exemplo 1.3

No exemplo anterior: $S \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Observação

Chamamos um conjunto sem elementos de conjunto vazio. Denotamos $\emptyset$.

Teorema 1.1

Para todo conjunto A *vale que:*

(i) $\emptyset \subseteq A$;

(ii) $A \subseteq A$.

Observação

$A = B$ *se, e somente se,* $A \subseteq B$ *e* $B \subseteq A$.

Conjuntos finitos e infinitos

- Se o conjunto A tem exatamente n elementos, com $n \in \mathbb{N}$, dizemos que A é um conjunto finito e que n é o cardinal de A.

  Denotamos: $|A| = n$, ou $\#A = n$.

Exemplo 1.4

1. *O conjunto S do Exemplo 1.2 é tal que:* $|S| = 6$.
2. *Para o conjunto vazio temos que* $|\emptyset| = 0$.

- Dizemos que um conjunto é infinito se ele não é finito.

Conjunto de Partes

- Dado um conjunto A, o conjunto das partes de A é o conjunto de todos os subconjuntos de A.

  Denotamos: $\mathcal{P}(A)$.

Exemplo 1.5

(i) *Se* $A = \{1, 2, 3\}$ *então*

$$\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

(ii) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ *enquanto que* $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Observação

Se $|A| = n$ *então vale que* $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

Produto cartesiano

A n-upla ordenada $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é a coleção ordenada que tem x_1 como seu primeiro elemento, x_2 como seu segundo elemento, etc.

- O produto cartesiano dos conjuntos A e B é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) tais que $a \in A$ e $b \in B$.

  Denotamos $A \times B$. Isto é: $A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$.

Exemplo 1.6

Se $A = \{1\}$ *e* $B = \{1, 2, 3, 4\}$ *então:*

$$A \times B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4)\}.$$

Mas, note que: $B \times A = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1)\}$. *Isto é,*

$$A \times B \neq B \times A.$$

Em geral!

O produto cartesiano dos conjuntos A_1, A_2, ..., A_n é o conjunto:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i, \text{ para } i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}.$$

Exemplo 1.7

Se $A = \{1\}, B = \{1, 2\}$ *e* $C = \{4, 5, 6\}$ *então,*

$$A \times B \times C = \{(1, 1, 4), (1, 1, 5), (1, 1, 6), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 2, 6)\}.$$

Operações de conjuntos

Sejam A e B conjuntos. Definimos:

- A união de A e B como sendo o conjunto que contém elementos que estão em A ou em B, ou em ambos. Denotamos $A \cup B$. Isto é:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

- A interseção de A e B como sendo o conjunto que contém elementos que estão em A e em B, simultaneamente. Denotamos $A \cap B$. Isto é:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Observação

Quando $A \cap B = \emptyset$ dizemos que A e B são conjuntos disjuntos.

Operações de conjuntos

- A diferença de A e B como sendo o conjunto que contém elementos que estão em A mas não estão em B. Denotamos $A - B$. Isto é:

$$A - B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Observação

$A - B$ também é chamada de complemento de B em relação a A.

- Se Ω é o conjunto universo, então chamamos complemento de A ao conjunto $\Omega - A$.

  Denotamos A^c. Isto é: $A^c = \{a \in \Omega : a \notin A\}$.

Identidades de conjuntos

Propriedades dos elementos neutros:

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \Omega = A.$$

Propriedades de dominação:

$$A \cup \Omega = \Omega, \quad A \cap \emptyset = \emptyset.$$

Propriedades idempotentes:

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A.$$

Propriedades de complementação:

$$(A^c)^c = A.$$

Identidades de conjuntos

Propriedades comutativas:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

Propriedades associativas:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

Propriedades distributivas:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Identidades de conjuntos

Leis de Morgan:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Propriedades de absorção:

$$A \cap (A \cup B) = A, \quad A \cup (A \cap B) = A.$$

Propriedades dos complementares:

$$A \cup A^c = \Omega, \quad A \cap A^c = \emptyset.$$

Algumas das provas

Para provar que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ note que:

$$\begin{aligned}
(A \cup B)^c &= \{x : x \notin A \cup B\} && \text{pela definição de complemento} \\
&= \{x : x \notin A \text{ e } x \notin B\} && \text{pela definição de } \notin A \cup B \\
&= \{x : x \in A^c \text{ e } x \in B^c\} && \text{pela definição de complemento} \\
&= A^c \cap B^c && \text{pela definição de interseção}
\end{aligned}$$

Algumas das provas

Para provar que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ note que:

1) $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$. De fato, se $x \in A \cup (B \cap C)$, então

$$x \in A \text{ ou } x \in B \cap C,$$

que podemos reescrever como:

$$x \in A \text{ e } x \in B, \text{ ou } x \in A \text{ e } x \in C,$$

ou ambos. Mas isto é o mesmo que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e portanto:

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Algumas das provas

Por outro lado, vamos verificar:

2) $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$. De fato, se

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

então

$$x \in A \text{ ou } x \in B \text{ ou ambos, e } x \in A \text{ ou } x \in C \text{ ou ambos.}$$

Mas isto implica que $x \in A$ ou que $x \in B$ e $x \in C$, ou ambos. Logo

$$x \in A \cup (B \cap C)$$

e portanto $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.

... e de (1) e (2) concluímos a igualdade dos conjuntos.

Uniões e interseções generalizadas

Sejam A_1, A_2, ..., A_n, uma coleção de n conjuntos. Definimos:

- A união deles como sendo o conjunto que contém elementos que estão em, pelo menos, um dos conjuntos da coleção. Denotamos:

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

- A interseção deles como sendo o conjunto que contém elementos que estão em todos conjuntos da coleção. Denotamos:

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

Uniões e interseções generalizadas

Podemos estender as definições anteriores para uma coleção de um número infinito de conjuntos A_1 A_2, A_3, ... Isto é:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots$$

e

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots$$

Exemplo 1.8

Para cada $n \in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$, *seja*

$$A_n = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Então,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{1, 2, \ldots, i\} = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{Z}^+$$

enquanto que

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{1, 2, \ldots, i\} = \{1\}.$$

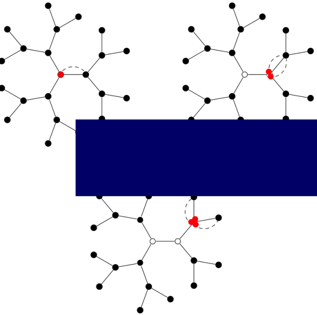
Referência para esta revisão . . . e exercícios sugeridos!

Kenneth H. Rosen. Matemática Discreta e suas Aplicações, Mc-Graw Hill, 2010. (Capítulo 2)

Exercícios:

- Seção 2.1: 1, 3, 4, 8, 16, 17;
- Seção 2.2: 1, 3, 14, 16, 20, 45, 48.

Entregar os exercícios em vermelho na segunda-feira 07/06!



Bom estudo!