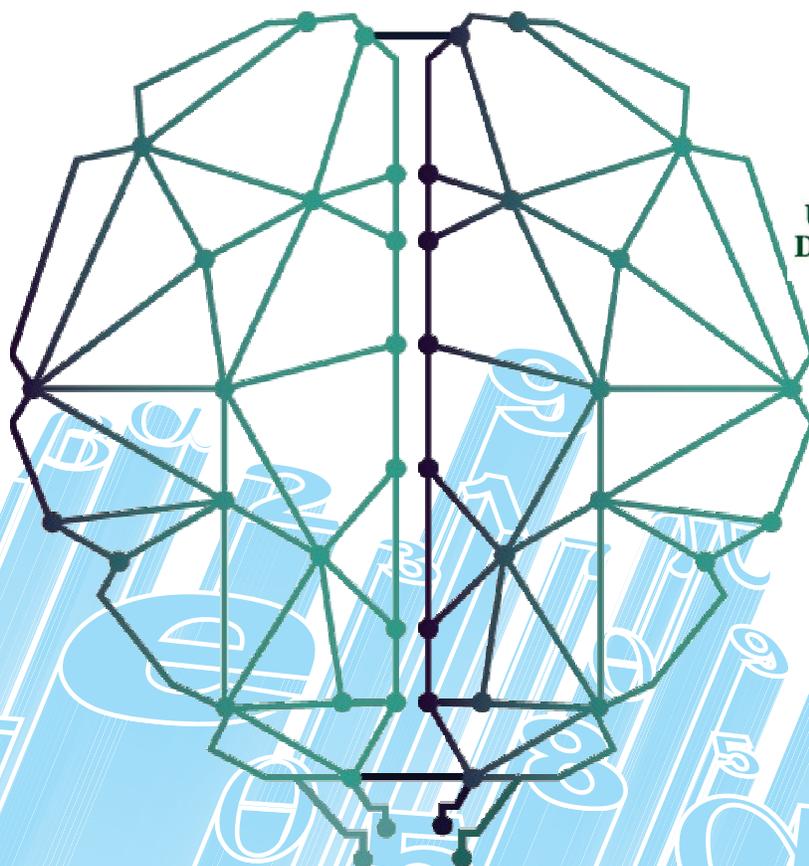


Modelos probabilísticos discretos y aplicaciones



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803



EMALCA
COLOMBIA- 2017

Apoyan:





Modelos probabilísticos discretos y aplicaciones

Pablo Rodríguez (ICMC-USP, SP)

Monitor: Alejandro Roldán (UdeA, Med)

Organización

Comité Científico

Cristian Ortiz (Coordinador), USP, Sao Paulo, Brasil.
Andrea Solotar, UBA, Buenos Aires, Argentina.
Alexander Quintero V., UNAL-Med, Medellín, Colombia

Comité Organizador

Pedro Hernández Rizzo (Coordinador), UdeA, Medellín-Colombia.
Cristian Ortiz, USP, Sao Paulo-Brasil.
Yamidt Bermudez Tobón, UniValle, Cali-Colombia.
Alexander Quintero V., UNAL-Med, Medellín-Colombia.

Índice general

Introducción	6
1. Paseos aleatorios	7
1.1. Problema de la ruina del jugador	7
1.2. Paseo aleatorio en \mathbb{Z}^+	10
1.3. Paseo aleatorio en \mathbb{Z}	13
1.4. Modelo de los sapos en \mathbb{Z}	14
Problemas	15
2. Cadenas de Markov a tiempo discreto	19
2.1. Definiciones preliminares	19
2.2. Recurrencia y transitoriedad	22
2.3. Análisis del primer paso	25
2.4. Distribución estacionaria	27
Problemas	29
3. Procesos de ramificación	33
3.1. Procesos de Bienaymé-Galton-Watson	33
3.2. Funciones generadoras de probabilidad	35
3.3. Probabilidad de extinción	37
Problemas	41
A. Sucesiones monótonas de eventos	42
A.1. Continuidad de la probabilidad	42
Bibliografía	44

Introducción

El objetivo de estas notas es cubrir el contenido que va a ser presentado en 4 charlas sobre modelos probabilísticos discretos. El principal foco es mostrar de forma rápida e intuitiva modelos clásicos a través de su construcción y su relación con otros problemas. Para una lectura más profunda se sugiere al lector consultar los libros de texto [14, 19, 20], que son excelentes referencias sobre procesos estocásticos y sus aplicaciones.

En el presente texto se da de forma elemental una introducción a las cadenas de Markov a tiempo discreto usando dos modelos básicos de la teoría de las probabilidades; a saber, el paseo aleatorio y el proceso de ramificación. El primero fue propuesto como un modelo simple para describir la trayectoria realizada por una molécula a medida que esta viaja en un líquido o en un gas. Ya el segundo está inspirado en el estudio de la sobrevivencia de un apellido a través de las diferentes generaciones de una familia.

Serán resumidas algunas propiedades de estos modelos y su relación con conceptos básicos de la teoría de cadenas de Markov. A lo largo del texto, se presentarán ejemplos y aplicaciones. Si bien se asume como requisito tener cierta familiaridad con conceptos elementales de teoría de probabilidad, al final de las notas se adiciona un apéndice sobre sucesiones monótonas de eventos, concepto que será muy aplicado a lo largo de los capítulos.

Las notas están organizadas de la siguiente forma. El Capítulo 1 presenta de forma constructiva el modelo conocido como paseo aleatorio y se establece uno de sus principales resultados relacionado con la noción de *recurrencia* y *transitoriedad*. También se discute en este capítulo sobre algunas generalizaciones. El Capítulo 2 está dedicado a una rápida introducción a las cadenas de Markov a tiempo discreto a través de ejemplos y propiedades básicas. Ya el Capítulo 3 describe el modelo estocástico conocido como proceso de ramificación y presenta el primer resultado de la teoría que trata sobre la *sobrevivencia* y *extinción* de tales procesos. Cada capítulo tiene al final una lista de problemas relacionados.

Pablo M. Rodríguez
São Carlos, Junio de 2017

1 Paseos aleatorios

En este capítulo presentamos el paseo aleatorio en \mathbb{Z} y el resultado sobre *recurrencia* y *transitoriedad*. Esto será realizado de forma constructiva, iniciando con un problema muy conocido en la teoría de probabilidades; a saber, el problema de la ruina del jugador.

1.1 Problema de la ruina del jugador

Iniciamos este capítulo con un interesante problema cuyo enunciado y solución tienen un gran protagonismo en los inicios de la teoría de la probabilidad. Tal problema, conocido como **la ruina del jugador**, fue propuesto por Blaise Pascal a Fermat en 1656. A seguir citamos la versión propuesta por Huygens en 1657 (Edwards, 1983).

Problema: Suponga que dos jugadores, A y B , apuestan lanzando sucesivamente una moneda cuya probabilidad de resultar en cara es p , con $p \in (0, 1)$. En cada lanzamiento el jugador A gana un peso del jugador B si la moneda resulta en cara; caso contrario el jugador B gana un peso de A . Suponga, además, que inicialmente hay n pesos en juego, A tiene i pesos y B tiene $n - i$ pesos. El juego termina cuando uno de los dos jugadores se queda con todo el dinero. ¿Cuál es la probabilidad de que A gane el juego? ¿Cuál es la duración media del juego?

A seguir calculamos estos valores y formulamos el problema desde el contexto de un paseo aleatorio. Para una revisión de la historia del problema y una discusión sobre las soluciones de Pascal, Fermat y Huygens, entre otros, sugerimos la lectura de [5].

Probabilidad de ganar el juego

Una pregunta interesante es: ¿cuál es la probabilidad de que A gane el juego? Para calcular esta probabilidad vamos a definir el evento:

$$A(i) := \{\text{el jugador } A \text{ gana el juego}\}.$$

El evento depende de i , en la notación, debido a la suposición de que A inicia el juego con i pesos. Como queremos calcular $p_i := \mathbb{P}(A(i))$, definimos el evento

$$C_1 := \{\text{el primer lanzamiento resulta en cara}\}$$

y usamos el Teorema de la probabilidad total (ver Problema 1.1) para mostrar que

$$p_i = \mathbb{P}(A(i)|C_1) \mathbb{P}(C_1) + \mathbb{P}(A(i)|C_1^c) \mathbb{P}(C_1^c),$$

lo que implica que

$$p_i = p p_{i+1} + (1 - p) p_{i-1}. \tag{1.1}$$

No es difícil verificar que (1.1) vale para todo $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$. Por otro lado, $p_0 = 0$ y $p_n = 1$ (¿por qué?). Ahora el problema se reduce a encontrar la solución del sistema de ecuaciones en diferencias (1.1),

con las condiciones de contorno $p_0 = 0$ y $p_n = 1$. Para simplificar la notación denotamos $q := 1 - p$. Así (1.1) puede ser escrita como

$$p_{i+1} - p_i = \left(\frac{q}{p}\right) (p_i - p_{i-1}), \quad i \in \{1, 2, \dots, n-1\}. \quad (1.2)$$

Aplicando sucesivamente (1.2) (para $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$) y usando $p_0 = 0$ tenemos que

$$p_i - p_{i-1} = \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} p_1, \quad (1.3)$$

para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Esta última expresión nos permite encontrar

$$\begin{aligned} p_i &= p_{i-1} + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} p_1 \\ &= p_{i-2} + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-2} p_1 + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} p_1 \\ &\quad \vdots \\ &= \left(1 + \left(\frac{q}{p}\right) + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \dots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right) p_1. \end{aligned}$$

Luego, una primera expresión para la probabilidad p_i , para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, está dada por:

$$p_i = \begin{cases} \frac{1 - (q/p)^i}{1 - (q/p)} p_1, & \text{si } q \neq p, \\ i p_1, & \text{si } q = p. \end{cases}$$

Como $p_n = 1$ podemos obtener de la expresión anterior, para $i = n$, el valor de p_1 en función de p y de q , y por lo tanto, concluir que:

$$p_i = \begin{cases} \frac{1 - (q/p)^i}{1 - (q/p)^n}, & \text{si } q \neq p, \\ i/n, & \text{si } q = p, \end{cases} \quad (1.4)$$

para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Esta es la probabilidad de que el jugador A gane el juego asumiendo que empieza con i pesos mientras que B comienza con $n - i$ pesos.

Duración media del juego

El tiempo medio de duración del juego es el valor esperado del número de lanzamientos de la moneda que son necesarios realizar hasta que alguno de los jugadores llegue a la ruina. El mismo método usado para obtener (1.1), que consiste en condicionar sobre el resultado del primer lanzamiento, puede ser aplicado para encontrar este valor esperado. Para esto, suponemos como antes que A comienza con i pesos mientras que B empieza con $n - i$ pesos. Definimos la variable aleatoria:

$T_i =$ número de lanzamientos necesarios hasta que uno de los jugadores llegue a la ruina

y denotamos $m_i := \mathbb{E}[T_i]$, para todo $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. En este caso, $m_0 = m_n = 0$ (¿por qué?). Tenemos que,

$$m_i = p(1 + m_{i+1}) + (1 - p)(1 + m_{i-1}), \quad (1.5)$$

para $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. La Ecuación (1.5) resulta como aplicación de la noción de esperanza condicional (ver Problema 1.2). De (1.5) podemos concluir que

$$m_i = \frac{1}{q-p} \left(i - n \frac{1 - (q/p)^i}{1 - (q/p)^n} \right) \quad (1.6)$$

si $q \neq p$ y que $m_i = i(n-i)$ cuando $q = p$, para $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Verificamos el caso $q = p$ y dejamos como ejercicio probar (1.6) cuando $q \neq p$. Suponga $p = 1/2$. La Ecuación (1.5) implica, para $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, que

$$m_i = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) m_{i+1} + \left(\frac{1}{2}\right) m_{i-1},$$

que podemos escribir como

$$m_{i+1} = 2m_i - m_{i-1} - 2. \quad (1.7)$$

Como $m_0 = 0$ obtenemos de (1.7) que

$$m_i = i(m_1 - i + 1),$$

para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Luego, $m_n = 0$ y la identidad precedente implican que $m_1 = n-1$ y por lo tanto

$$m_i = i(n-i),$$

para $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, lo que prueba el resultado para el caso $q = p$.

Observación 1.1.1. Existen muchas variantes del problema presentado en esta sección. En [9] se analiza la ruina del jugador con empates y en [18] se estudia un problema de ruina de jugador pero con más de 2 jugadores involucrados. Ambas referencias son una buena lectura sobre el asunto.

La ruina del jugador desde la perspectiva de un paseo aleatorio

El problema de la ruina del jugador será nuestra excusa para introducir la noción de paseo aleatorio. Informalmente hablando, el modelo de paseo aleatorio es la descripción matemática de las consecutivas posiciones de una partícula que “pasea” en instantes discretos de tiempo por los vértices de un grafo y eligiendo las posiciones de acuerdo a una regla probabilística.

Suponga que la fortuna del jugador A es representada por una partícula posicionada en el intervalo discreto $\llbracket 0, n \rrbracket$. Cada vez que A gana la partícula da un paso a la derecha, mientras que cada vez que A pierde el paso es hacia la izquierda. En otras palabras, en cada instante discreto de tiempo, la partícula da un paso a la derecha con probabilidad p o a la izquierda con probabilidad $1-p$, con $p \in (0, 1)$ (ver Figura 1.1).

Observe que el evento $A(i)$ puede ser interpretado, en el contexto del paseo aleatorio, como el evento:

$$A(i) = \{\text{la partícula llega al vértice } n \text{ antes de llegar al vértice } 0\},$$

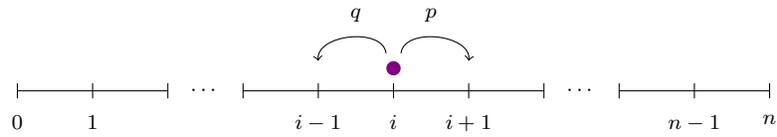
mientras que la variable aleatoria T_i , la duración del juego, puede ser interpretada como el número de pasos que la partícula dará hasta llegar a uno de los extremos del intervalo, esto es, 0 o n .

Si la variable aleatoria Y_k , $k \geq 0$, denota la posición de la partícula exactamente después del k -ésimo paso, la sucesión $(Y_k)_{k \geq 0}$ es conocida como **paseo aleatorio** (PA) en $\llbracket 0, n \rrbracket$, con absorción en 0 o en n . Podemos escribir estas variables aleatorias de la siguiente forma: si X_1, X_2, \dots son una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) tales que

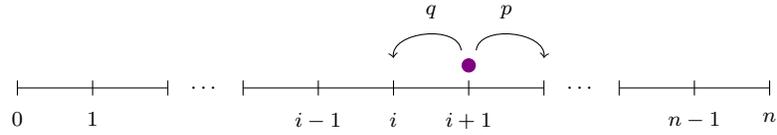
$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_1 = -1),$$

entonces, $Y_{n+1} = Y_n + \tilde{X}_n$, para $n \geq 0$, donde

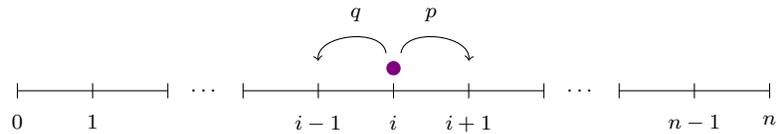
$$\tilde{X}_n = \begin{cases} X_n, & \text{si } Y_n \notin \{0, n\}, \\ 0, & \text{si } Y_n \in \{0, n\}. \end{cases}$$



(a) En $n = 0$ la partícula está en el vértice i .



(b) En $n = 1$ la partícula salta para el vértice $i + 1$.



(c) En $n = 2$ la partícula salta para el vértice i .

Figura 1.1: PA en $\llbracket 0, n \rrbracket$.

1.2 Paseo aleatorio en \mathbb{Z}^+

En esta sección extendemos el modelo de paseo aleatorio de la sección anterior, definido en el intervalo discreto $\llbracket 0, n \rrbracket$, para el conjunto de los enteros no negativos \mathbb{Z}^+ . Para esto, suponga que una partícula está localizada en algún vértice $i \in \mathbb{Z}^+$ y que en el siguiente instante discreto de tiempo salta con probabilidad p para el vértice $i + 1$ o con probabilidad $1 - p$ para el vértice $i - 1$. Por simplicidad, suponga que si $i = 0$ entonces la partícula saltará para el vértice 1 con probabilidad 1 (ver Figura 1.2). Además suponemos que estas elecciones ocurren de forma independiente para todo instante de tiempo.

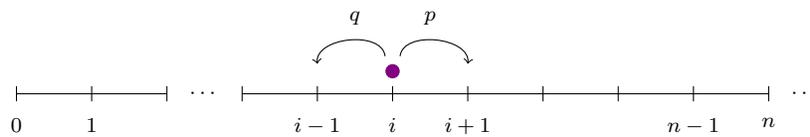


Figura 1.2: Paseo aleatorio en \mathbb{Z}^+ .

Formalmente, considere una sucesión de variables aleatorias X_1, X_2, X_3, \dots independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) tales que

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_1 = -1).$$

Observe que si Y_0 denota la posición inicial de la partícula entonces $Y_{n+1} = Y_n + \tilde{X}_n$, para todo $n = 0, 1, 2, \dots$, donde

$$\tilde{X}_n = \begin{cases} X_n, & \text{si } Y_n \neq 0, \\ 1, & \text{si } Y_n = 0, \end{cases}$$

es la posición de la partícula exactamente después de dar el n -ésimo salto.

Una pregunta interesante para este modelo es: ¿existe alguna chance de que la partícula nunca visite nuevamente su posición inicial? Para formular esta pregunta de forma matemática definimos la variable aleatoria

$$\tau_i^+ := \inf\{n \geq 1 : Y_n = i\},$$

con la convención de que $\tau_i^+ = \infty$ si el ínfimo no es alcanzado. Entonces, lo que queremos saber es si

$$\mathbb{P}(\tau_i^+ = \infty | Y_0 = i) > 0 \text{ o } \mathbb{P}(\tau_i^+ < \infty | Y_0 = i) = 1.$$

Como veremos en el siguiente resultado la respuesta depende de p .

Teorema 1.2.1. *Sea $(Y_n)_{n \geq 0}$ el PA en \mathbb{Z}^+ . Para todo $i \geq 0$,*

$$\mathbb{P}(\tau_i^+ = \infty | Y_0 = i) > 0 \text{ si, y solamente si, } p > 1/2.$$

Demostración. Condicionando sobre el primer salto de la partícula, obtenemos

$$\mathbb{P}(\tau_i^+ = \infty | Y_0 = i) = p \mathbb{P}(\tau_i^+ = \infty | Y_0 = i, Y_1 = i + 1) + (1 - p) \mathbb{P}(\tau_i^+ = \infty | Y_0 = i, Y_1 = i - 1).$$

Como $\mathbb{P}(\tau_i^+ = \infty | Y_0 = i, Y_1 = i - 1) = 0$ entonces $\mathbb{P}(\tau_i^+ = \infty | Y_0 = i) > 0$ si, y solamente si,

$$\mathbb{P}(\tau_i^+ = \infty | Y_0 = i, Y_1 = i + 1) > 0. \quad (1.8)$$

Para probar (1.8) definimos los eventos:

$$B(n) = \{\text{una vez en } i + 1 \text{ la partícula alcanza el vértice } n + i \text{ antes que el vértice } i\},$$

para $n \geq 2$. La sucesión $(B(n))_{n \geq 2}$ es una sucesión decreciente de eventos pues

$$B(n + 1) \subset B(n),$$

para todo $n \geq 2$. Luego, del Teorema A.1.2 tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B(n)) = \mathbb{P}(\cap_{n=2}^{\infty} B(n)). \quad (1.9)$$

Por un lado, una comparación con el problema de la ruina del jugador nos permite concluir de (1.4) que

$$\mathbb{P}(B(n)) = \mathbb{P}(A(1)) = \begin{cases} \frac{1 - (q/p)^i}{1 - (q/p)^n}, & \text{si } q \neq p, \\ 1/n, & \text{si } q = p. \end{cases}$$

Luego,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B(n)) = \begin{cases} 1 - (q/p)^i, & \text{si } q < p, \\ 0, & \text{si } q \geq p. \end{cases} \quad (1.10)$$

Por otro lado, por la definición de los eventos $B(n)$, tenemos que

$$\mathbb{P}(\tau_i^+ = \infty | Y_0 = i, Y_1 = i + 1) = \mathbb{P}(\cap_{n=2}^{\infty} B(n)). \quad (1.11)$$

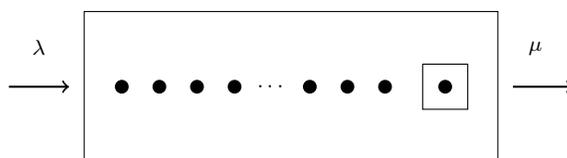
Concluimos la prueba del teorema de (1.9), (1.10), (1.11) y notando que $q < p$ si, y solamente si, $p > 1/2$. ■

Observación 1.2.2. El Teorema 1.2.1 establece que podemos encontrar dos comportamientos diferentes para el PA en \mathbb{Z}^+ ; a saber, $\mathbb{P}(\tau_i^+ = \infty | Y_0 = i) > 0$ que llamamos **transitoriedad** o $\mathbb{P}(\tau_i^+ = \infty | Y_0 = i) > 0$ que llamamos **recurrencia**. Estos conceptos serán abordados en más detalle en el próximo capítulo donde también veremos que si el resultado vale para un estado entonces vale para todos los estados del PA.

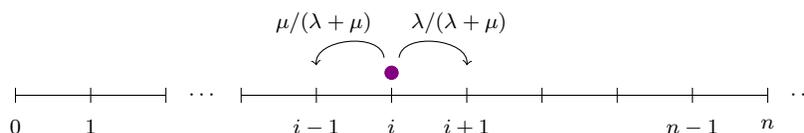
Ejemplo 1.2.3. Modelo de fila $M/M/1$. El modelo $M/M/1$ es un ejemplo de modelo estocástico a tiempo continuo que describe el número de clientes en un sistema. En el modelo se asumen las siguientes condiciones:

- clientes llegan de acuerdo a un proceso de Poisson de parámetro λ , con $\lambda > 0$; es decir, el tiempo transcurrido entre una llegada y la siguiente está exponencialmente distribuido con tasa λ ;
- el sistema tiene un único servidor, que atiende de a un cliente a la vez;
- cada cliente gasta en el servidor un tiempo aleatorio con distribución exponencial de parámetro $\mu > 0$, independiente al de cualquier otro cliente y al proceso de llegadas;
- en caso de que llegue un nuevo cliente al sistema y encuentre el servidor ocupado, este se une a una fila única.

La sucesión $(X_t)_{t \in [0, \infty)}$, donde X_t denota el número de clientes que hay en el sistema en el instante t , con $t \geq 0$, es llamada modelo $M/M/1$. Como el objetivo de estas notas es discutir sobre modelos discretos, vamos a resumir las propiedades anteriores diciendo que el modelo $M/M/1$ es tal que a partir de cada instante de tiempo, o entrará un cliente después de un tiempo exponencial de parámetro λ , o saldrá un cliente (si hay por lo menos uno en el sistema) después de un tiempo exponencial de parámetro μ . Para más detalles sobre modelos a tiempo continuo y modelos de filas consultar [14, 19].



(a) Sistema del modelo $M/M/1$ con i clientes.



(b) Paseo aleatorio en \mathbb{Z}^+ relacionado.

Figura 1.3: Comparación entre el modelo $M/M/1$ y el paseo aleatorio en \mathbb{Z}^+ .

Si nos concentramos apenas en las transiciones del número de clientes y no en los instantes en que esto ocurre tenemos que, habiendo un número i de clientes este número puede ir para $i + 1$, o para $i - 1$, si $i \neq 0$, o apenas para 1 si $i = 0$. Denote por $(Y_n)_{n \geq 0}$ la sucesión de variables que describe estas transiciones, es decir, Y_n denota el número de clientes en el sistema exactamente después de la n -ésima transición observada. Así definida, esta sucesión es un PA en \mathbb{Z}^+ (ver Figura 1.3).

En este caso $p = \lambda/(\lambda + \mu)$ (¿por qué?). Luego, el Teorema 1.2.1 garantiza que este paseo aleatorio será recurrente si, y solamente si, $p \leq 1/2$. Es decir, si, y solamente, si $\lambda \leq \mu$. Volviendo al modelo original, a tiempo continuo, parafraseando el resultado concluimos que la fila crecerá indefinidamente con probabilidad positiva si, y solamente si, $\lambda > \mu$. Note que $\lambda > \mu$ implica que la tasa de llegadas es mayor que la tasa de salidas; es decir, ¡llegan clientes de forma más rápida de lo que son atendidos por el servidor!

□

1.3 Paseo aleatorio en \mathbb{Z}

Considere una sucesión de variables aleatorias X_1, X_2, \dots i.i.d. con distribución común dada por:

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_1 = -1),$$

para algún $p \in (0, 1)$. Asumiendo que $Y_0 = i$, para algún $i \in \mathbb{Z}$, definimos inductivamente las variables aleatorias:

$$Y_n := Y_{n-1} + X_n, \quad (1.12)$$

para todo $n \geq 1$. Llamamos PA en \mathbb{Z} a la sucesión de variables aleatorias $(Y_n)_{n \geq 0}$. Esta sucesión puede ser interpretada como la posición de una partícula paseando por los enteros asumiendo que inicia el paseo en el vértice i y realiza sucesivos pasos eligiendo, de forma independiente, saltar una unidad a la derecha con probabilidad p o a la izquierda con probabilidad $1 - p$. Nuestro objetivo es encontrar condiciones para garantizar la recurrencia o transitoriedad en este modelo.

De (1.12) tenemos que:

$$Y_n = \sum_{i=1}^n X_i,$$

para $n \geq 1$. Luego $\mathbb{E}[Y_n] = n(2p - 1)$ y entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y_n] = \begin{cases} +\infty, & \text{si } p > 1/2, \\ 0, & \text{si } p = 1/2, \\ -\infty, & \text{si } p < 1/2. \end{cases}$$

Esto nos da una primera intuición del siguiente resultado.

Teorema 1.3.1. *Sea $(Y_n)_{n \geq 0}$ el PA en \mathbb{Z} . Para todo $i \in \mathbb{Z}$ sea*

$$\tau_i := \inf\{n \geq 1 : Y_n = i\}.$$

Entonces, para todo $i \geq 0$

$$\mathbb{P}(\tau_i = \infty | Y_0 = i) > 0 \text{ si, y solamente si, } p \neq 1/2.$$

Demostración. Como hemos hecho hasta ahora, vamos a obtener información sobre

$$\mathbb{P}(\tau_i = \infty | Y_0 = i)$$

condicionando sobre la variable aleatoria X_1 , es decir, el primer paso de la partícula. Con efecto, note que

$$\mathbb{P}(\tau_i = \infty | Y_0 = i) = p \mathbb{P}(\tau_i = \infty | Y_1 = i + 1) + (1 - p) \mathbb{P}(\tau_i = \infty | Y_1 = i - 1). \quad (1.13)$$

La idea ahora es observar que, dado que $Y_1 = i + 1$, el evento $\{\tau_i = \infty\}$ es equivalente al evento $\{\tau_0^+ = \infty\}$ dado que $Y_0^{(D)} = 1$, donde $(Y_n^{(D)})_{n \geq 0}$ es el PA en \mathbb{Z}^+ definido en la sección anterior. Luego

$$\mathbb{P}(\tau_i = \infty | Y_1 = i + 1) > 0 \text{ si, y solamente si } p > 1/2. \quad (1.14)$$

De forma analoga, dado que $Y_1 = i - 1$, el evento $\{\tau_i = \infty\}$ es equivalente al evento $\{\tau_0^+ = \infty\}$ dado que $Y_0^{(I)} = 1$ donde $(Y_n^{(I)})_{n \geq 0}$ es el PA en \mathbb{Z}^+ tal que la probabilidad de saltar a derecha es $1 - p$ mientras que la probabilidad de saltar a izquierda es p . Luego

$$\mathbb{P}(\tau_i = \infty | Y_1 = i - 1) > 0 \text{ si, y solamente si, } p < 1/2. \quad (1.15)$$

De (1.13), (1.14) e (1.15) podemos concluir por un lado que

$$\mathbb{P}(\tau_i = \infty | Y_0 = i) > 0$$

si $p > 1/2$ o $p < 1/2$, es decir si $p \neq 1/2$ y por otro lado que

$$\mathbb{P}(\tau_i < \infty | Y_0 = i) = 1$$

si $p \leq 1/2$ y $p \geq 1/2$, es decir si $p = 1/2$. Finalmente, concluimos que el PA en \mathbb{Z} es recurrente si, y solamente si, $p = 1/2$. ■

El Teorema 1.3.1 afirma que solamente hay recurrencia en el caso de $p = 1/2$. En este caso, la partícula tiene la misma chance de saltar para cualquiera de los dos vecinos de su posición actual. Un paseo aleatorio con esta propiedad se llama **paseo aleatorio simétrico (PAS)**. Cuando consideramos el paseo aleatorio simétrico en \mathbb{Z}^d ($d \geq 1$), es decir $p = 1/2d$, es posible probar el siguiente resultado sobre recurrencia o transitoriedad.

Teorema 1.3.2. *El PAS. en \mathbb{Z}^d , $(Y_n)_{n \geq 0}$, es recurrente si, y solamente si, $d \in \{1, 2\}$.*

Demostración. Ver Ejemplo 2.2.5. ■

1.4 Modelo de los sapos en \mathbb{Z}

En la sección anterior vimos condiciones para garantizar recurrencia y transitoriedad del PA en \mathbb{Z} . También vimos que el PAS en \mathbb{Z}^d es recurrente si, y solamente si, $d = 1, 2$. En esta sección discutiremos la noción de recurrencia para un modelo definido a partir de no apenas una, mas de un sistema formado por infinitas partículas realizando paseos aleatorios independientes en \mathbb{Z} .

Consideramos el **modelo de los sapos en \mathbb{Z}** que puede ser descrito de la siguiente forma: en un instante $n = 0$ cada vértice $n \in \mathbb{Z}$ está ocupado por η_n partículas, donde $(\eta_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ es una sucesión de valores enteros no negativos. Se asume que hay dos tipos de partículas, las activas y las inactivas. Cada partícula activa realiza, de forma independiente a cualquier otra, un paseo aleatorio en \mathbb{Z} , con probabilidad p de saltar a la derecha. Por otro lado, cada partícula inactiva permanece inmóvil hasta que el vértice donde se encuentra es visitado por una partícula activa, en cuyo caso es activada. La configuración inicial asume que apenas las partículas del 0 están activas y que todas las restantes están inactivas. También por simplicidad se asume que $\eta_0 = 1$. En la Figura 1.4 se ilustra una posible realización del modelo en los primeros instantes.

La literatura del modelo de los sapos es amplia y los primeros resultados se encuentran en [1], donde el modelo es estudiado en diferentes grafos infinitos. En [17] se hace una revisión interesante de resultados y en [16] se compara una versión del modelo, en el grafo completo, con modelos matemáticos existentes en la literatura para describir la transmisión de un rumor en una población. De hecho, la versión original del modelo de los sapos está inspirada en el fenómeno de transmisión de una información. En este sentido podemos pensar que partículas activas son portadoras de una información y la transmiten a todas las partículas inactivas que encuentran en su camino. Con esta interpretación, las partículas inactivas representan individuos que ignoran la información.

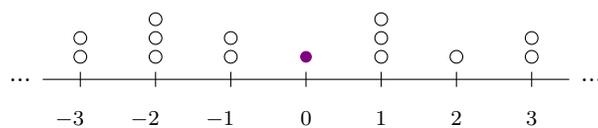
Resultados recientes sobre recurrencia de este modelo en diferentes tipos de grafos pueden ser encontrados en [12] y en las referencias de dicho trabajo. Aquí consideramos la siguiente definición de recurrencia.

Definición 1.4.1. El modelo de los sapos en \mathbb{Z} con configuración inicial $(\eta_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ es recurrente si el 0 es visitado infinitas veces, por partículas activas, con probabilidad 1. Caso contrario decimos que el modelo es transitorio.

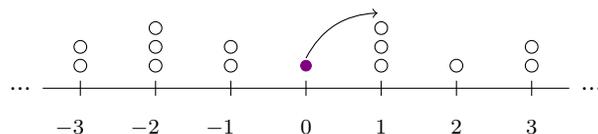
Teorema (Gantert & Schmidt, 2009). *Considere el modelo de los sapos en \mathbb{Z} con configuración inicial $(\eta_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. El modelo es recurrente si, y solamente si,*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \left(\frac{1-p}{p} \right)^i = \infty.$$

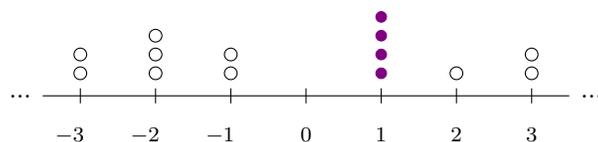
Demostración. Ver [7, Teorema 2.1]. ■



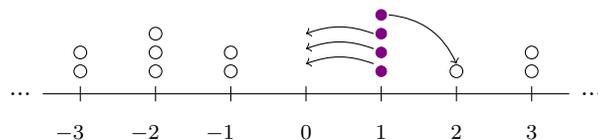
(a) En el instante $n = 0$ solamente la partícula localizada en el vértice 0 está activa.



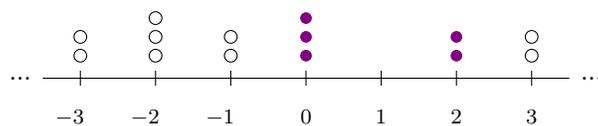
(b) La partícula inicialmente activa elige un vértice vecino con probabilidad p (derecha), o $1 - p$ izquierda.



(c) En el instante $n = 1$ la partícula inicialmente activa salta al vértice vecino elegido activando todas las partículas allí localizadas.



(d) Cada nueva partícula activa elige un vértice vecino, de forma independiente, y con probabilidades p (derecha) o $1 - p$ (izquierda).



(e) partículas inactivas son activadas cuando una partícula activa salta en el vértice donde se encuentran localizadas.

Figura 1.4: Descripción de primeros instantes del modelo de los sapos en \mathbb{Z} .

Problemas

1.1 **Teorema de la probabilidad total.** Sea Ω el espacio muestral de un experimento aleatorio y $A \subset \Omega$ un evento tal que $\mathbb{P}(A) > 0$. Si $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ es una partición de Ω ; esto es, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y $\Omega = \cup_{i=1}^n A_i$, demuestre que

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A|A_i)\mathbb{P}(A_i).$$

1.2 Dadas dos variables aleatorias discretas X y Y definimos la esperanza condicional de X dado que $Y = y$,

para y tal que $\mathbb{P}(Y = y) > 0$, como

$$\mathbb{E}[X|Y = y] := \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathbb{P}(X = x_i|Y = y).$$

Muestre que para todo par de variables aleatorias discretas X y Y , vale la identidad $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]]$. En otras palabras, muestre que

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}[X|Y = y_j] \mathbb{P}(Y = y_j).$$

1.3 Considere el problema de la ruina del jugador de la Sección 1.1. Sea p_i la probabilidad de que el jugador A gane el juego suponiendo que A inicie con i pesos y que B comience con $n - i$ pesos.

- a) Explique por qué $p_0 = 0$ y $p_n = 1$.
- b) Muestre que $p_1 = (1 - q/p)(1 - \{q/p\}^n)^{-1}$ si $q \neq p$ y que $p_1 = 1/n$, si $q = p$.

1.4 Considere el problema de la ruina del jugador de la Sección 1.1. Sea m_i la duración media del juego. Suponga que A comienza con i pesos y que B comienza con $n - i$ pesos.

- a) Explique por qué $m(0) = m(n) = 0$.
- b) Muestre que $m_i = 1 + p m_{i+1} + q m_{i-1}$ para $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$.
- c) Muestre que $m_i - m_{i-1} = a + b(q/p)^i$, donde a y b son constantes.
- d) Considere $p \neq q$ y use (c) para concluir que

$$m_i = \left(\frac{i}{q-p} \right) - \left(\frac{n}{q-p} \right) \left(\frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n} \right).$$

1.5 Suponga que la fortuna inicial del jugador A es de i pesos y que sabemos que el ganará el juego. Dada esta información muestre que la probabilidad de que A gane la primer apuesta está dada por:

$$\frac{p \{1 - (q/p)^{i+1}\}}{1 - (q/p)^i}$$

si $p \neq 1/2$, y por $(i + 1)/2i$ si $p = 1/2$.

1.6 Considere el PA en \mathbb{Z} con $p \in (0, 1)$. Demuestre que:

a)

$$\mathbb{P}(Y_{2n} = 0|Y_0 = 0) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n.$$

b)

$$\mathbb{P}(\tau_n < \infty|Y_0 = 0) = \left(\frac{1-p}{p} \right)^n.$$

c) Para $i, j \in \mathbb{Z}$, con $i \neq j$, existen constantes $n_1 > 0$ y $n_2 > 0$ tales que

$$\mathbb{P}(Y_{n_1} = j|Y_0 = i) > 0 \text{ y } \mathbb{P}(Y_{n_2} = i|Y_0 = j) > 0.$$

1.7 Pruebe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{4p(1-p)\}^n}{\sqrt{\pi n}} < \infty$$

si, y solamente si, $p \neq 1/2$.

1.8 **Fórmula de Stirling.** Una herramienta importante de la teoría de probabilidades es la aproximación:

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

obtenida de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = 1.$$

a) Muestre que

$$\int_0^n \log x \, dx < \log n! < \int_1^{n+1} \log x \, dx.$$

b) Use (a) para probar que

$$n \log n - n < \log n! < (n+1) \log(n+1) - n.$$

c) Las desigualdades en (b) sugieren comparar $\log n!$ con algún valor próximo de la media aritmética de los extremos. Sea

$$d_n = \log n! - (n+1/2) \log n + n.$$

Muestre que

$$d_n - d_{n+1} = \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \dots$$

Sugerencia: note que

$$\frac{n+1}{n} = \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}}$$

y use la expansión

$$\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} = x + (1/3)x^3 + (1/5)x^5 + \dots$$

d) Use la expresión en (c) para mostrar que

$$0 < d_n - d_{n+1} < \frac{1}{3\{(2n+1)^2 - 1\}} = \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}.$$

Sugerencia: Compare con la serie geométrica $\sum_{i=1}^{\infty} \{(2n+1)^{-2}\}^i$.

e) Concluya de (c) y (d) que

$$C := \lim_{n \rightarrow \infty} d_n < \infty.$$

Verifique que esto es equivalente a decir que $n! \sim e^C n^{n+1/2} e^{-n}$.

Sugerencia: note que la sucesión $(d_n)_n$ es decreciente y que la sucesión $(d_n - (12n)^{-1})_n$ es creciente.

f) El producto de Wallis está dado por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^n \left(\frac{2i}{2i-1} \frac{2i}{2i+1} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Usando esta igualdad, pruebe que

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)! \sqrt{2n}}.$$

g) A partir de (e) y (f) concluya que $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$.

1.9 Demuestre la siguiente identidad combinatoria

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}.$$

1.10 Considere el PAS en \mathbb{Z}^3 . Verifique que

$$\mu_{2n}^{(3)} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \frac{(2n)!}{i! i! j! j! (n-i-j)! (n-i-j)!} \left(\frac{1}{6}\right)^{2n},$$

donde $\mu_{2n}^{(3)} = \mathbb{P}(X_{2n} = \mathbf{0} | X_0 = \mathbf{0})$ y $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$.

1.11 Considere un PA en \mathbb{Z}^+ tal que

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = 1 | Y_n = 0) = p_0 = 1 - \mathbb{P}(Y_{n+1} = 0 | Y_n = 0)$$

y

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = i + 1 | Y_n = i) = p_i = 1 - \mathbb{P}(Y_{n+1} = i - 1 | Y_n = i),$$

para todo $n \geq 0$ y para todo $i \geq 1$. Discuta sobre la recurrencia o transitoriedad de este PA en las siguientes situaciones:

- $p_i \leq 1/2$ para todo $i \geq 0$;
- $p_i > 1/2$ para todo $i \geq 0$;
- existe $\ell := \lim_{i \rightarrow \infty} p_i$ y $\ell > 1/2$;
- existe $\ell := \lim_{i \rightarrow \infty} p_i$ y $\ell < 1/2$.

2 Cadenas de Markov a tiempo discreto

Este capítulo está dedicado a una rápida introducción a la teoría de cadenas de Markov a tiempo discreto. El principal objetivo es presentar de forma sucinta los principales conceptos y primeros resultados de esta teoría.

2.1 Definiciones preliminares

Definición 2.1.1. Un proceso estocástico a tiempo discreto es una sucesión de variables aleatorias $(X_n)_{n \geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$, definidas en el mismo espacio de probabilidad y con valores en algún conjunto contable S .

Decimos que el proceso es “a tiempo discreto” porque usualmente el subíndice n representa unidades de tiempo y el proceso $(X_n)_{n \geq 0}$ describe la evolución de un determinado fenómeno a lo largo del tiempo. El conjunto S es llamado **espacio de estados** del proceso y cada uno de sus elementos es llamado **estado**.

El paseo aleatorio en \mathbb{Z} es un ejemplo de proceso estocástico a tiempo discreto. En ese caso, el proceso está formado por la sucesión $(Y_n)_{n \geq 0}$, donde la variable aleatoria Y_n denota la posición de la partícula exactamente después del n -ésimo paso. Para el paseo aleatorio se satisface, por ejemplo, la siguiente identidad:

$$P(Y_{n+1} = i + 1 | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = p = P(Y_{n+1} = i + 1 | Y_n = i),$$

para todo $n \geq 1$, independientemente del subconjunto $\{i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i\} \subset \mathbb{Z}$ considerado. Este ejemplo ilustra una propiedad general conocida como **propiedad de Markov**, o **propiedad Markoviana**, que da lugar a una clase muy especial e importante de procesos estocásticos.

Definición 2.1.2. Una cadena de Markov a tiempo discreto (CMTD) con espacio de estados S es un proceso estocástico $(X_n)_{n \geq 0}$ tomando valores en S tal que

$$P(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = P(X_{n+1} = j | X_n = i),$$

para todo $n \geq 0$ y para todo subconjunto $\{i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j\} \subset S$.

Observación 2.1.3. Los inicios de la teoría de cadenas de Markov se remontan a 1913, a un trabajo del matemático ruso A.A. Markov en el que se aplica matemática para el estudio de una poesía. Markov pasó horas estudiando los patrones de vocales y consonantes de una novela de Alexander Pushkin y si bien su análisis no aportó mucho para el estudio de la literatura de la época, sus técnicas son las que dieron origen a lo que hoy conocemos como cadenas de Markov (Hayes, 2013).

A groso modo, una cadena de Markov es un proceso estocástico para el cual el futuro depende solamente del presente.

De la Definición 2.1.2, vemos que para todo $i, j \in S$ y para todo $n \geq 0$ las probabilidades

$$p(i, j) := P(X_{n+1} = j | X_n = i),$$

llamadas **probabilidades de transición** son fundamentales para realizar cálculos involucrados con una cadena de Markov. De hecho, podemos verificar que la cadena de Markov está completamente determinada

por estas probabilidades y por la distribución de su estado inicial. Por ejemplo, si $P(X_0 = i) = \alpha_i$, para todo $i \in \mathcal{S}$, donde las constantes α_i son tales que $0 \leq \alpha_i \leq 1$ y $\sum_{i \in \mathcal{S}} \alpha_i = 1$, entonces

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = \alpha_{i_0} p(i_0, i_1) \dots p(i_{n-1}, i_n). \quad (2.1)$$

Es decir, la probabilidad de la historia del proceso desde el instante inicial hasta el instante n es una función de las probabilidades de transición $p(i, j)$ y de los valores α_i .

Podemos reunir la información proveniente de las probabilidades de transición en una matriz P , llamada **matriz de transición**, cuyas entradas son los valores $p(i, j)$. Si $|\mathcal{S}| = n$, por ejemplo, la matriz de transición está dada por:

$$P := \begin{bmatrix} p(1, 1) & p(1, 2) & p(1, 3) & \dots & p(1, n) \\ p(2, 1) & p(2, 2) & p(2, 3) & \dots & p(2, n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p(n, 1) & p(n, 2) & p(n, 3) & \dots & p(n, n) \end{bmatrix}.$$

Para toda cadena de Markov a tiempo discreto, si $i, j \in \mathcal{S}$ entonces $p(i, j) \geq 0$ y

$$\sum_{j \in \mathcal{S}} p(i, j) = 1.$$

Es posible representar gráficamente las transiciones de una CMTD a través de un grafo dirigido. En ese caso, cada estado está en correspondencia con un vértice y cada arista dirigida representa una posible transición. Además a las aristas se les designa un peso representando las probabilidades de transición. A modo de ejemplo, considere la CMTD $(X_n)_{n \geq 0}$ con espacio de estados $\{0, 1\}$ y matriz de transición dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

La representación gráfica de esta matriz está dada en la Figura 2.1.

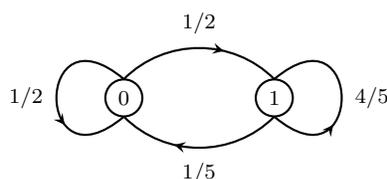


Figura 2.1: Representación gráfica de la cadena de Markov con $\mathcal{S} = \{0, 1\}$ y matriz de transición dada por (2.2).

Observación 2.1.4. Usando representación gráfica de una CMTD no es difícil verificar que esta puede ser vista como un PA en el respectivo grafo.

Ejemplo 2.1.5. Modelo de rumor de Daley-Kendall. El modelo de Daley-Kendall fue propuesto en 1964 [3, 4] como un modelo matemático para describir la propagación de un rumor en una población homogénea, cerrada y totalmente mezclada. Lo interesante de este trabajo es que es la primera vez que tal fenómeno es modelado de forma diferente a la propagación de una infección, como era considerado en trabajos anteriores.

Para su formulación se asume una población de N personas, que se divide en tres tipos de individuos: los ignorantes (*ignorants*), que son aquellos que no saben del rumor; los informantes (*spreaders*), que saben el rumor y lo están propagando en la población y los neutros (*stiflers*), que saben el rumor pero ya no transmiten la información. Las interacciones entre personas se dan de a pares, formados al azar, y las posibles interacciones son representadas en la Figura 2.2.

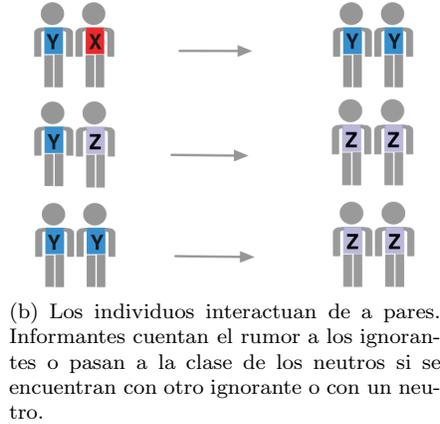


Figura 2.2: Clases de individuos y posibles transiciones del modelo de Daley-Kendall. Fuente: “A General Markov Chain Approach for Disease and Rumor Spreading in Complex Networks” de Arruda et al., 2016, preprint arXiv:1609.00682, p. 4.

El modelo se define como una CMTD $(V_n)_{n \geq 0}$, siendo que en este caso las variables son vectores aleatorios de tres coordenadas. Es decir $V_n := (X_n, Y_n, Z_n)$, donde X_n, Y_n y Z_n denotan el número de ignorantes, informantes y neutros, respectivamente, en el n -ésimo instante de tiempo del proceso, para $n \geq 0$. El espacio de estados está dado por $\mathcal{S} = \{0, 1, \dots, N\}^3$ y las probabilidades de transición por:

$$\mathbb{P}((X_{n+1}, Y_{n+1}, Z_{n+1}) = (i-1, j+1, k) | (X_n, Y_n, Z_n) = (i, j, k)) = \frac{j}{\binom{N}{2}};$$

$$\mathbb{P}((X_{n+1}, Y_{n+1}, Z_{n+1}) = (i, j-1, k+1) | (X_n, Y_n, Z_n) = (i, j, k)) = \frac{j}{\binom{N}{2}};$$

$$\mathbb{P}((X_{n+1}, Y_{n+1}, Z_{n+1}) = (i-1, j-2, k+2) | (X_n, Y_n, Z_n) = (i, j, k)) = \frac{j(j-1)}{\binom{N}{2}}.$$

Aquí se asume $X_n + Y_n + Z_n = N$ para todo $n \geq 0$, lo cual representa que la población es cerrada. \square

Algunas veces es conveniente trabajar con la siguiente definición de cadena de Markov.

Definición 2.1.6. Sea $(X_n)_{n \geq 0}$ un proceso con valores en el conjunto \mathcal{S} . Si existe una sucesión de variables aleatorias U_1, U_2, \dots i.i.d. con distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$ y una función $f : \mathcal{S} \times (0, 1) \rightarrow \mathcal{S}$ tal que

$$X_{n+1} = f(X_n, U_n),$$

para todo $n \geq 0$, decimos que el proceso es una cadena de Markov a tiempo discreto.

Ejemplo 2.1.7. Considere el PA en \mathbb{Z} , $(Y_n)_{n \geq 0}$, definido en la sección anterior. Si U_1, U_2, \dots es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. entonces podemos escribir

$$Y_{n+1} = f(Y_n, U_n),$$

donde la función $f : \mathbb{Z} \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$ está dada por

$$f(i, u) := \begin{cases} i + 1, & \text{si } u < p, \\ i - 1, & \text{si } u \geq p. \end{cases}$$

Luego el PA es una cadena de Markov a tiempo discreto. □

En general, si $(X_n)_{n \geq 0}$ es una CMTD con espacio de estados \mathcal{S} , se llaman **probabilidades de transición en n pasos** a las probabilidades

$$p_n(i, j) := \mathbb{P}(X_{m+n} = j | X_m = i),$$

para todo $m, n \geq 0$ y $i, j \in \mathcal{S}$. En este caso $p_1(i, j) = p(i, j)$ y por convención asumimos que

$$p_0(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Las siguientes ecuaciones son útiles para calcular las probabilidades $p_n(i, j)$ de una cadena de Markov.

Proposición 2.1.8. (Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov) Sea $(X_n)_{n \geq 0}$ una CMTD con espacio de estados \mathcal{S} . Entonces,

$$p_{n+r}(i, j) = \sum_{k \in \mathcal{S}} p_n(i, k) p_r(k, j), \quad (2.3)$$

para todo $n, r \geq 0$ y $i, j \in \mathcal{S}$.

Demostración. Por definición $p_{n+r}(i, j) = \mathbb{P}(X_{n+r} = j | X_0 = i)$. Por otro lado, note que

$$\{X_{n+r} = j\} = \cup_{k \in \mathcal{S}} (X_{n+r} = j, X_n = k)$$

y como la unión es sobre eventos mutuamente excluyentes tenemos que

$$p_{n+r}(i, j) = \sum_{k \in \mathcal{S}} \mathbb{P}(X_{n+r} = j, X_n = k | X_0 = i). \quad (2.4)$$

Además

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+r} = j, X_n = k | X_0 = i) &= \mathbb{P}(X_{n+r} = j | X_n = k, X_0 = i) \mathbb{P}(X_n = k | X_0 = i) \\ &= p_r(k, j) p_n(i, k), \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde la primera igualdad es por definición de probabilidad condicional y la segunda por la propiedad Markoviana. De (2.4) y (2.5) concluimos el resultado. ■

2.2 Recurrencia y transitoriedad

En el capítulo anterior estudiamos el concepto de recurrencia y transitoriedad de un paseo aleatorio. Este concepto puede extenderse a todas las cadenas de Markov como veremos a seguir.

Definición 2.2.1. Sea $(X_n)_{n \geq 0}$ una CMTD con espacio de estados \mathcal{S} . Para $i \in \mathcal{S}$ sea

$$\tau_i := \inf\{n \geq 1 : X_n = i\},$$

y sea $\tau_i := \infty$ si el ínfimo no existe. Si

$$\mathbb{P}(\tau_i < \infty | X_0 = i) = 1$$

decimos que i es un estado recurrente. Si i no es recurrente decimos que es transitorio.

El siguiente teorema nos da una condición para saber cuándo un estado es recurrente o transitorio.

Teorema 2.2.2. Sea $(X_n)_{n \geq 0}$ una CMTD con espacio de estados \mathcal{S} y probabilidades de transición $p(i, j)$ para $i, j \in \mathcal{S}$. Entonces

$$i \in \mathcal{S} \text{ es recurrente si, y solamente si, } \sum_{n=0}^{\infty} p_n(i, i) = \infty.$$

Demostración. Considere las variables indicadoras I_n definidas por

$$I_n := \begin{cases} 1, & \text{si } X_n = i, \\ 0, & \text{si } X_n \neq i. \end{cases}$$

Observe que $\sum_{n=0}^{\infty} I_n$ es el número de visitas del proceso al estado i . Suponga que el estado i es recurrente. Entonces

$$\mathbb{P}(\tau_i < \infty | X_0 = i) = 1$$

y

$$\mathbb{E} \left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n \mid X_0 = i \right) = \infty.$$

La ida del teorema resulta como consecuencia de que

$$\mathbb{E} \left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n \mid X_0 = i \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(I_n | X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = i | X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(i, i).$$

Para probar la vuelta suponga que el estado i es transitorio. En este caso

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n \mid X_0 = i \right) \sim \text{Geom}(p_i)$$

donde $p_i := \mathbb{P}(\tau_i = \infty | X_0 = i) > 0$ y por lo tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(i, i) = \mathbb{E} \left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n \mid X_0 = i \right) = \frac{1}{p_i} < \infty.$$

■

Decimos que dos estados $i, j \in \mathcal{S}$ son de la misma **clase** si existen constantes $n_1 \geq 0$ y $n_2 \geq 0$ tales que

$$p_{n_1}(i, j) > 0 \text{ y } p_{n_2}(j, i) > 0.$$

Decimos que una CMTD es **irreducible** si todos sus estados pertenecen a la misma clase.

Ejemplo 2.2.3. Sea $(X_n)_{n \geq 0}$ una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y matriz de probabilidades de transición:

$$P = \begin{bmatrix} 1/6 & 5/6 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podemos representar gráficamente esta cadena como en la Figura 2.3 e identificar que existen tres clases: $\mathcal{C}_1 = \{0, 1\}$, $\mathcal{C}_2 = \{2, 3\}$ y $\mathcal{C}_3 = \{4\}$.

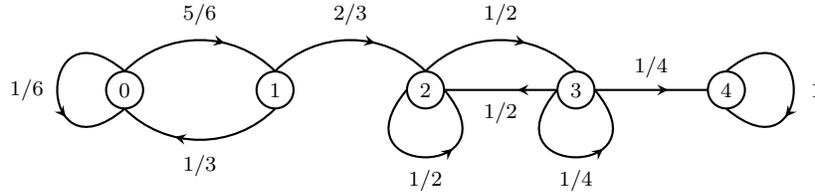


Figura 2.3: Representación gráfica de la cadena de Markov del Ejemplo 2.2.3.

□

Corolario 2.2.4. Si dos estados i y j son de la misma clase y el estado i es recurrente, entonces el estado j es recurrente.

Como consecuencia del resultado anterior tenemos que para verificar si un estado es recurrente o transitorio, es suficiente verificar esto para cualquier estado de su clase. Cuando una cadena de Markov es irreducible decimos que la cadena es recurrente o transitorio si sus estados son recurrentes o transitorios, respectivamente.

Ejemplo 2.2.5. Recurrencia para el PA en \mathbb{Z}^d . Considere el PA en \mathbb{Z}^d , $(Y_n)_{n \geq 0}$. Podemos demostrar el Teorema 1.3.2 a partir del Teorema 2.2.2. Por el Corolario 2.2.4 es suficiente mostrar el resultado para $\mathbf{0} \in \mathbb{Z}^d$. Para el caso $d = 1$ considere el PA general, con probabilidad p de saltar a la derecha y probabilidad $1 - p$ de saltar a la izquierda. Observamos que $p_{2n-1}(0, 0) = 0$ para $n \geq 1$ mientras que

$$p_{2n}(0, 0) = \binom{2n}{n} p^n (1 - p)^n.$$

Denotamos $q := 1 - p$ y usamos la fórmula de Stirling en la expresión anterior (ver Ejercicio 8) para conseguir

$$p_{2n}(0, 0) \sim \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

El resultado es obtenido a partir de la aproximación anterior y notando que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}} = \infty \text{ si, y solamente si, } p = \frac{1}{2}.$$

El caso $d \geq 2$ requiere un poco más de trabajo. En particular, para el PAS en $d = 2$ si $\mathbf{0} = (0, 0)$ podemos mostrar que

$$p_{2n}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n},$$

que, por la identidad combinatoria del Ejercicio 9, se puede escribir como

$$p_{2n}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}.$$

Una aplicación de la fórmula de Stirling implica que $p_{2n}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \sim (\pi n)^{-1}$. Luego el PA es recurrente. Para una prueba de la transitoriedad del PA para $d = 3$ sugerimos al lector consultar [20, Sección I.8, pág. 28].

2.3 Análisis del primer paso

Em **análisis del primer paso** es una técnica usada para calcular probabilidades y esperanzas relacionadas con una cadena de Markov. La idea general es condicionar sobre el primer instante de la cadena y, después de aplicar convenientemente la propiedad Markoviana, trabajar con ecuaciones recursivas relacionadas con la cantidad que se desea calcular. Este es el método que hemos usado cuando trabajamos con la ruina del jugador. En esta sección mostramos otros ejemplos de aplicación los cuales serán, si la imaginación y delicadeza del lector lo permite, sobre zombis.

Ejemplo 2.3.1. Rick vs Zombies. Suponga que Rick se encuentra en una casa y avanza de habitación en habitación siempre eligiendo al azar entre cuartos contiguos. Suponiendo que uno de los cuartos está lleno de zombis y que en otro hay un arma, ¿cuál es la probabilidad de que Rick encuentre el arma antes que el cuarto con los zombis? Para facilitar la resolución considere que los cuartos están numerados, ver Figura 2.4(a). Además supongamos que inicialmente Rick está en el cuarto 2, los zombis están encerrados en el cuarto 7 y que el arma está en la habitación 8.

Vamos a describir el problema a través de la CMTD $(X_n)_{n \geq 0}$ con espacio de estados $\{1, 2, \dots, 8\}$ y matriz de transición

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aquí X_n representa el n -ésimo cuarto visitado por Rick. Sea A el evento de que Rick encuentre el arma antes que el cuarto con zombis y considere

$$p_i := \mathbb{P}(A|X_0 = i),$$

para $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$. Note que $p_7 = 0$ y $p_8 = 1$. Nuestro objetivo es encontrar p_1 . Condicionando sobre X_1 tenemos, por ejemplo, que

$$p_2 = \sum_{i=1}^3 \mathbb{P}(A|X_0 = 2, X_1 = 2i - 1) \mathbb{P}(X_1 = 2i - 1|X_0 = 2)$$

que resulta en

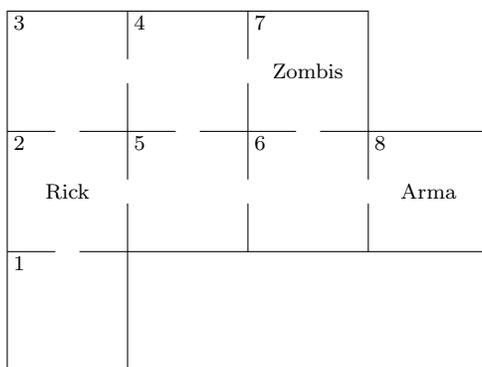
$$p_2 = \frac{1}{3} p_1 + \frac{1}{3} p_3 + \frac{1}{3} p_5.$$

El mismo razonamiento nos lleva a las siguientes ecuaciones: $p_1 = p_2$,

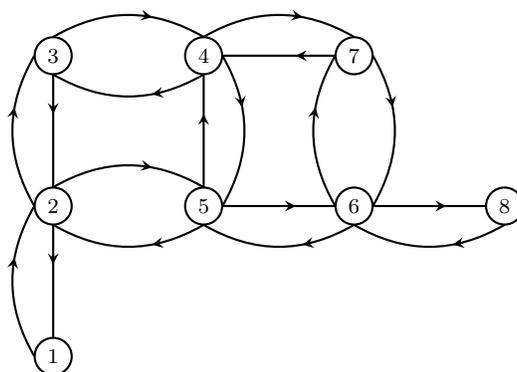
$$p_3 = \frac{1}{2} (p_2 + p_4), \quad p_4 = \frac{1}{3} (p_3 + p_5), \quad p_5 = \frac{1}{3} (p_2 + p_4 + p_6), \quad \text{y} \quad p_6 = \frac{1}{3} (p_5 + 1)$$

cuya solución es $p_1 = p_2 = 3/13$, $p_3 = 5/26$, $p_4 = 2/13$, $p_5 = 7/26$ y $p_6 = 11/26$. Es decir, la probabilidad de interés es $p_2 = 0,230769$.

□



(a) Configuración inicial en la casa.



(b) Representación de la cadena de Markov.

Figura 2.4: Ejemplo 2.3.1. Rick vs Zombis.

Cálculos análogos nos permiten encontrar el tiempo medio, medido en número de cuartos visitados, hasta que alguna de las habitaciones sea encontrada. Vemos esto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.2. Considere la cadena de Markov definida en el Ejemplo 2.3.1 y defina la variable aleatoria $T := \inf\{n \geq 0 : X_n \in \{7, 8\}\}$. Podemos calcular $\mathbb{E}(T|X_0 = 2)$ de la siguiente forma. Defina para todo $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$

$$m_i := \mathbb{E}(T|X_0 = i)$$

y note que $m_7 = m_8 = 0$. Por otro lado, condicionando sobre el primer paso del proceso, y usando la propiedad Markoviana obtenemos que

$$m_2 = \frac{1}{3}(1 + m_1) + \frac{1}{3}(1 + m_3) + \frac{1}{3}(1 + m_5) = 1 + \frac{1}{3}(m_1 + m_3 + m_5).$$

Análogamente, encontramos las siguientes ecuaciones: $m_1 = 1 + m_2$,

$$m_3 = 1 + \frac{1}{2}(m_2 + m_4), \quad m_4 = 1 + \frac{1}{3}(m_3 + m_5), \quad m_5 = 1 + \frac{1}{3}(m_2 + m_4 + m_6) \text{ y } m_6 = 1 + \frac{1}{3}m_5,$$

cuya solución está dada por $m_1 = 145/13$, $m_2 = 132/13$, $m_3 = 123/13$, $m_4 = 88/13$, $m_5 = 102/13$ y $m_6 = 47/13$. Luego, el valor de interés es $m_2 = 10,1538$.

□

2.4 Distribución estacionaria

Finalizamos este capítulo con la noción de distribución estacionaria de una CMTD. Intuitivamente una distribución estacionaria para una cadena de Markov puede ser pensada como un “equilibrio” para el proceso. A seguir resumimos las principales definiciones y resultados del tema. Si bien algunos de los resultados serán presentados sin prueba incluimos referencias en las que estas pueden ser consultadas en una lectura más profunda de asunto.

Definición 2.4.1. Sea $(X_n)_{n \geq 0}$ una CMTD con espacio de estados \mathcal{S} y probabilidades de transición dadas por $p(i, j)$. Decimos que una distribución de probabilidades sobre \mathcal{S} , $\pi := (\pi(i))_{i \in \mathcal{S}}$, es una distribución estacionaria para la cadena de Markov si

$$\pi(j) = \sum_{i \in \mathcal{S}} \pi(i)p(i, j), \quad (2.6)$$

para todo $j \in \mathcal{S}$.

A seguir veremos que si una cadena de Markov comienza a partir de una distribución estacionaria entonces la distribución de su estado para todo instante de tiempo también es estacionaria.

Proposición 2.4.2. Sean $(X_n)_{n \geq 0}$ una CMTD con espacio de estados \mathcal{S} , probabilidades de transición $p(i, j)$ y $\pi := (\pi(i))_{i \in \mathcal{S}}$ una distribución estacionaria para la cadena. Si $X_0 \sim \pi$ entonces $X_n \sim \pi$ para todo $n \geq 1$.

Demostración. La prueba es por inducción. Sabemos que $X_0 \sim \pi$; esto es, $\mathbb{P}(X_0 = i) = \pi(i)$, para $i \in \mathcal{S}$. Para el paso de inducción asumimos que $X_{n-1} \sim \pi$. Entonces, para cada $j \in \mathcal{S}$, tenemos que

$$\mathbb{P}(X_n = j) = \sum_{i \in \mathcal{S}} \mathbb{P}(X_n = j | X_{n-1} = i) \mathbb{P}(X_{n-1} = i) = \sum_{i \in \mathcal{S}} p(i, j) \pi(i) = \pi(j),$$

donde la primer igualdad es consecuencia del Teorema de la probabilidad total, la segunda es por la hipótesis inductiva y la tercera porque π es una distribución estacionaria para la cadena. ■

Ejemplo 2.4.3. Considere la CMTD $(X_n)_{n \geq 0}$ con espacio de estados $\mathcal{S} = \{0, 1\}$ y matriz de transición

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}.$$

La representación gráfica de esta cadena está dada en la Fig. 2.1. Una distribución estacionaria para esta cadena debe satisfacer (2.6); es decir,

$$\pi(0) = \frac{1}{2}\pi(0) + \frac{1}{5}\pi(1), \quad \text{y} \quad \pi(1) = \frac{1}{2}\pi(0) + \frac{4}{5}\pi(1).$$

Luego $\pi = (2/7, 5/7)$. □

No siempre existe una distribución estacionaria para una cadena de Markov. El PA en \mathbb{Z} es un ejemplo de esto y su verificación se deja como ejercicio. Para presentar el teorema de existencia de la distribución estacionaria necesitamos la siguiente definición, en la que consideramos la variable τ_i de la Definición 2.2.1.

Definición 2.4.4. Sea $(X_n)_{n \geq 0}$ una CMTD con espacio de estados \mathcal{S} . Si

$$\mathbb{E}(\tau_i | X_0 = i) < \infty$$

decimos que i es un estado recurrente positivo. Si i no es recurrente positivo decimos que es recurrente nulo.

Teorema 2.4.5. Sea $(X_n)_{n \geq 0}$ una CMTD irreducible con espacio de estados \mathcal{S} . Existe una única distribución estacionaria π para esta cadena si, y solamente si, i es recurrente positivo para todo $i \in \mathcal{S}$. En este caso,

$$\pi(i) = \frac{1}{\mathbb{E}(\tau_i | X_0 = i)},$$

para $i \in \mathcal{S}$.

Demostración. Ver [20, Teorema II.1.1, pág. 48]. ■

Vimos, en la Proposición 2.4.2, que si $X_0 \sim \pi$ y π es una distribución estacionaria entonces la respectiva cadena de Markov es tal que $X_n \sim \pi$. A seguir veremos cuales son las condiciones para que, suponiendo existencia y unicidad de π , tengamos la siguiente convergencia:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(i, j) = \pi(j), \quad (2.7)$$

para todo $i, j \in \mathcal{S}$. El límite anterior no depende del estado inicial. Esto significa que en un tiempo suficientemente grande el proceso estará en el estado j con una probabilidad aproximada $\pi(j)$.

Primero observamos que no siempre estos límites convergen para una distribución de probabilidades.

Ejemplo 2.4.6. Sea $(X_n)_{n \geq 0}$ una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3\}$ y matriz de probabilidades de transición:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

En este caso, no es difícil verificar que, $\pi = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$ es la única distribución estacionaria para esta cadena. Por otro lado, para cualquier $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ tenemos que $p_{2n-1}(i, i) = 0$ para $n \geq 1$, lo que implica que (2.7) no es posible.

Definición 2.4.7. Decimos que un estado recurrente i tiene período d , si d es el máximo común divisor del conjunto

$$\{n \geq 1 : p_n(i, i) > 0\}.$$

Si un estado tiene período $d = 1$ decimos que es **aperiódico**. En el Ejemplo 2.4.6 todos los estados tienen período 2. De hecho es posible probar la siguiente propiedad, que se deja como ejercicio.

Proposición 2.4.8. Sean $(X_n)_{n \geq 0}$ una cadena de Markov con espacio de estados \mathcal{S} y $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ una clase de estados recurrentes. Si $i \in \mathcal{C}$ tiene período d entonces todo $j \in \mathcal{C}$ tiene período d .

Teorema 2.4.9. Sea $(X_n)_{n \geq 0}$ una cadena de Markov irreducible, recurrente y aperiódica con espacio de estados \mathcal{S} y probabilidades de transición $p(i, j)$. Si π es una distribución estacionaria para la cadena entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(i, j) = \pi(j),$$

para todo $i, j \in \mathcal{S}$.

Demostración. Ver [20, Teorema II.3.1, pág. 59]. ■

Problemas

2.1 Sea $(X_n)_{n \geq 0}$ una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$ y matriz de probabilidades de transición:

$$P = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Calcular:

- a) $\mathbb{P}(X_2 = 1, X_3 = 1 | X_0 = 0)$;
- b) $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1 | X_0 = 0)$.

2.2 Sea $(X_n)_{n \geq 0}$ una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$ y matriz de probabilidades de transición:

$$P = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{bmatrix}.$$

Calcular:

- a) $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1 | X_0 = 0)$;
- b) $\mathbb{P}(X_2 = 1, X_3 = 1 | X_0 = 0)$.

2.3 Sea $(X_n)_{n \geq 0}$ una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$ y matriz de probabilidades de transición:

$$P = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcular:

- a) $\mathbb{P}(X_2 = 2, X_3 = 1 | X_0 = 0)$;
- b) $\mathbb{P}(X_3 = 2 | X_0 = 0)$.

2.4 El siguiente es un modelo teórico simple propuesto por los físicos Paul y Tatyana Ehrenfest para representar el movimiento de moléculas entre dos compartimientos. Suponga que hay N bolas distribuidas en dos urnas. Cada bola es seleccionada al azar, de a una a la vez, retirada de la urna donde se encuentra y colocada en la otra urna. Si X_n denota el número de bolas en la primer urna exactamente después del n -ésimo cambio, muestre que $(X_n)_{n \geq 0}$ es una cadena de Markov y escriba sus probabilidades de transición.

2.5 *Problema de transmisión de un rumor.* Un grupo de N personas está dividido en ignorantes e informantes. Suponga que en cada instante discreto de tiempo apenas un par entre estas personas, seleccionado al azar, interactúa por medio de una conversación. Si el par es formado por un ignorante y un informante, el informante cuenta el rumor con probabilidad p , $p \in [0, 1]$, en cuyo caso el ignorante pasa a la clase de los informantes. En cualquier otra situación nada cambia. Sea X_n el número de informantes en el grupo después de la n -ésima interacción. Determine las probabilidades de transición de la cadena de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$.

2.6 Considere las siguientes cadenas de Markov:

- a) Paseo aleatorio en un círculo con 5 vértices;
- b) Procesos considerados en los ejercicios 1 a 3.

Encuentre una función $f(x, u)$, con $f : \mathcal{S} \times (0, 1) \rightarrow \mathcal{S}$, tal que para todo $n \geq 1$ podamos escribir

$$X_n = f(X_{n-1}, U_n),$$

donde $\{U_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con $U_i \sim U(0, 1)$.

2.7 Sea $(X_n)_{n \geq 0}$ una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y matriz de transición:

$$P = \begin{bmatrix} 1/6 & 5/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Encuentre todas las clases y determine cuales son transitorias y cuales son recurrentes.

2.8 Sea $(X_n)_{n \geq 0}$ una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y matriz de transición:

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Encuentre todas las clases y determine cuales son transitorias y cuales son recurrentes.

2.9 De un ejemplo de una clase infinita y cerrada que sea transitoria.

2.10 Sea $(X_n)_{n \geq 0}$ una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3\}$ y matriz de transición:

$$P = \begin{bmatrix} 2/5 & 3/10 & 1/5 & 1/10 \\ 0 & 7/10 & 1/5 & 1/10 \\ 0 & 0 & 9/10 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule el tiempo medio hasta que el proceso llegue el estado 3 dado que $X_0 = 0$.

2.11 Demuestre el Corolario 2.2.4.

2.12 Sea $(X_n)_{n \geq 0}$ una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$ y matriz de transición:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 3/5 & 3/10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Determine la probabilidad de que el proceso llegue al estado 0 dado que $X_0 = 1$.

b) Suponga que $\mathbb{P}(X_0 = i) = 1/3$, $i \in \{0, 1, 2\}$. Determine el tiempo medio de absorción del proceso.

2.13 Considere el problema de transmisión de un rumor del Ejercicio 2.5. Suponga que el grupo es de 5 personas y que inicialmente apenas una de ellas es informante. Calcule el tiempo medio hasta que todos sepan el rumor.

2.14 Una urna contiene 5 bolas rojas y 3 bolas verdes. Se elige una bola al azar. Si la bola elegida es roja entonces esta es retirada de la urna pero si la bola seleccionada es verde, esta es devuelta a la urna. Este proceso continua hasta que todas las bolas rojas sean retiradas. Cual es el tiempo medio de duración del proceso?

2.15 Sea $(X_n)_{n \geq 0}$ una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$ y matriz de transición:

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la distribución o distribuciones estacionarias de la cadena.

2.16 Sea $(X_n)_{n \geq 0}$ una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$ y matriz de transición:

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 2/5 & 1/10 \\ 3/10 & 2/5 & 3/10 \\ 1/5 & 3/10 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la distribución o distribuciones estacionarias de la cadena.

2.17 Considere una cadena de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ con valores en los enteros positivos y probabilidades de transición dadas por

$$p(i, i+1) = p \quad \text{e} \quad p(i, 0) = 1 - p$$

para $i \geq 0$, donde $0 < p < 1$.

- a) Pruebe que esta cadena es irreducible.
- b) Pruebe que esta cadena es recurrente positiva.

2.18 Pruebe que el PA en \mathbb{Z} no tiene distribución estacionaria.

2.19 Sea $(X_n)_{n \geq 0}$ una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3\}$ y matriz de transición:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la distribución o distribuciones estacionarias de esta cadena.

2.20 Sea $(X_n)_{n \geq 0}$ una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3\}$ y matriz de transición:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la distribución o distribuciones estacionarias de esta cadena.

2.21 Encuentre la distribución estacionaria de las cadenas de Markov consideradas en los Ejercicios 2.1 a 2.3.

2.22 Considere la cadena de Markov del Ejemplo 2.4.3 y calcule $\mathbb{E}(\tau_i | X_0 = i)$ directamente, para $i = 0, 1$.

2.23 Demuestre la Proposición 2.4.8

2.24 Sea $(X_n)_{n \geq 0}$ una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$ y matriz de transición:

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Muestre que para todo i y j la probabilidad $p_n(i, j)$ converge cuando $n \rightarrow \infty$.

2.25 Sea $(X_n)_{n \geq 0}$ una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3\}$ y matriz de transición:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

- a) Encuentre la distribución o distribuciones estacionarias de esta cadena.
- b) Encuentre todos los límites de $p_n(i, j)$ que existen.

3 Procesos de ramificación

En este capítulo nos dedicamos a una clase especial de cadenas de Markov llamadas procesos de ramificación.

3.1 Procesos de Bienaymé-Galton-Watson

Aunque parece ser que el nombre “proceso de ramificación” fue propuesto por Kolmogorov y Dmitriev en 1947 para describir procesos estocásticos que aparecen en el modelamiento de poblaciones, el concepto viene de mucho antes y fue considerado de forma independiente por Bienaymé (1845) y por Galton y Watson (1873). La motivación inicial ha sido el estudio de la descendencia de una familia. Una reseña histórica completa puede encontrarse en [8, 15].

Informalmente podemos pensar un proceso de ramificación, o proceso de Bienaymé-Galton-Watson (BGW), de la siguiente forma. Suponga que partículas dan nacimiento a nuevas partículas de acuerdo a una variable aleatoria discreta X con valores en el conjunto $\{0, 1, 2, \dots\}$ y función de distribución de probabilidades dada por

$$\mathbb{P}(X = k) = p_k \tag{3.1}$$

para $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Suponga que en el instante de tiempo $n = 0$ hay una única partícula y que esta da nacimiento en el instante $n = 1$ a nuevas partículas según una variable aleatoria i.i.d. a la variable X . Decimos que estas nuevas partículas son las descendientes directas de la anterior. Es decir, la partícula inicial da nacimiento a k descendientes directas con probabilidad p_k , para $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$. En general, si hay un cierto número de partículas en el instante n , cada una de estas dará nacimiento a nuevas partículas en el instante $n + 1$ de acuerdo a variables i.i.d. a la variable aleatoria X . En la Figura 3.1 ilustramos una posible realización de este proceso.

Decimos que la partícula del instante $n = 0$ constituye la **generación 0** y que las partículas que nacen en el instante n constituyen la **n -ésima generación** del proceso, $n \geq 1$. Denotamos por Z_n la variable aleatoria que cuenta el número de partículas de la n -ésima generación. Entonces $(Z_n)_{n \geq 0}$ es una cadena de Markov a tiempo discreto. Mas precisamente, tenemos la siguiente definición.

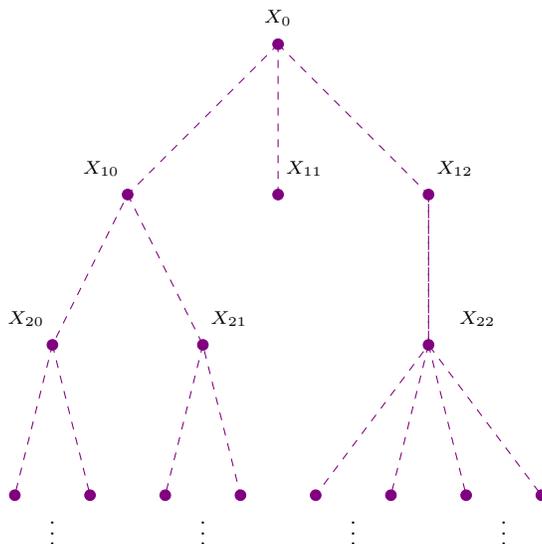


Figura 3.1: Posible realización de un proceso de ramificación. Las variables X_{ij} son i.i.d. a la variable X de (3.1).

Definición 3.1.1. Sea X una variable aleatoria discreta con distribución de probabilidades dada por (3.1). Llamamos proceso de Bienaymé-Galton-Watson, o simplemente proceso de ramificación, a la cadena de Markov $(Z_n)_{n \geq 0}$ con espacio de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots\}$ y probabilidades de transición dadas por:

$$p(i, j) = \begin{cases} \mathbb{P}(Z_{n+1} = j | Z_n = i) = \mathbb{P}\left(\sum_{r=1}^i X_r = j\right), & \text{para } i \geq 1 \text{ e } j \geq 0, \\ 0, & \text{para } i = 0 \text{ e } j > 0, \\ 1, & \text{para } i = 0 \text{ e } j = 0, \end{cases}$$

donde X_1, \dots, X_i son variables aleatorias i.i.d. a la variable aleatoria X .

Para simplificar la exposición asumimos que $Z_0 \equiv 1$. Note que si no hay partículas en la n -ésima generación entonces no habrá partículas en las generaciones siguientes. Por esto $p(0, j) = 0$ para $j > 0$ y $p(0, 0) = 1$. En este sentido, decimos que el estado 0 es un estado absorbente y representa el evento que llamamos **extinción** del proceso.

Definición 3.1.2. Sea $(Z_n)_{n \geq 0}$ un proceso de ramificación. Llamamos extinción del proceso al evento

$$\mathcal{E} = \bigcup_{n \geq 1} \{Z_n = 0\} \tag{3.2}$$

y llamamos sobrevivencia al evento complementario. Denotamos la probabilidad de extinción por $\rho := \mathbb{P}(\mathcal{E})$.

Observación 3.1.3. La extinción del proceso puede ser interpretada como la existencia de una generación a partir de la cual no nacen más partículas. Este evento puede ser escrito de la siguiente forma

$$\bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} \{Z_k = 0\}. \tag{3.3}$$

El objetivo de este capítulo es mostrar el teorema fundamental de los procesos de ramificación, el cual describe sobre qué condiciones hay extinción o sobrevivencia del proceso. Antes de esto, resumimos algunas propiedades de la variable aleatoria Z_n , para $n \geq 1$.

Proposición 3.1.4. Sean $m := \mathbb{E}(X)$ e $\nu := \mathbb{V}(X)$. Entonces $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$ y

$$\mathbb{V}(Z_n) = \begin{cases} v^2 m^{n-1} \left(\frac{m^n - 1}{m - 1} \right), & \text{si } m \neq 1 \\ nv^2, & \text{si } m = 1 \end{cases}$$

para todo $n \geq 1$.

Demostración. Vamos a mostrar que $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$ condicionando sobre los posibles valores de Z_{n-1} ; es decir

$$\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}(Z_n | Z_{n-1} = i) \mathbb{P}(Z_{n-1} = i).$$

Como

$$Z_n = \sum_{j=1}^{Z_{n-1}} X_j,$$

donde X_1, X_2, \dots son i.i.d. a la variable aleatoria X , entonces

$$\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^{Z_{n-1}} X_j | Z_{n-1} = i \right) \mathbb{P}(Z_{n-1} = i).$$

Por otro lado, dado que las variables aleatorias X_i y Z_{n-1} son independientes tenemos que

$$\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^i X_j \right) \mathbb{P}(Z_{n-1} = i) = m \sum_{i=1}^{\infty} i \mathbb{P}(Z_{n-1} = i).$$

Luego

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_n) &= m \mathbb{E}(Z_{n-1}) \\ &= m^2 \mathbb{E}(Z_{n-2}) \\ &\vdots \\ &= m^{n-1} \mathbb{E}(Z_1). \end{aligned}$$

Como $\mathbb{E}(Z_1) = \mathbb{E}(X) = m$, concluimos que $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$. La prueba de la expresión para $\mathbb{V}(Z_n)$ resulta de forma análoga con un poco más de trabajo y el uso de propiedades de varianza condicional (ver Problema 3.2). ■

3.2 Funciones generadoras de probabilidad

Para estudiar la extinción o no de un proceso de ramificación vamos a usar propiedades de la función generadora de probabilidades (fgp) de la variable aleatoria X . Es decir, consideramos la función $\phi(t)$ definida por

$$\phi(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i t^i, \quad |t| < 1.$$

A partir de $\phi(t)$ podemos obtener los valores p_k , para $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$. De hecho,

$$p_k = \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial^{(k)} \phi(t)}{\partial t^k} \right)_{t=0}. \quad (3.4)$$

A seguir vemos una interesante relación entre ϕ y la fgp del tamaño de la n -ésima generación del proceso. Usamos $(\phi \circ \phi)(t)$ para representar la función $\phi(\phi(t))$ resultante de iterar dos veces la función ϕ .

Proposición 3.2.1. Sean $\phi(t)$ y $\phi_n(t)$ las fgp de las variables aleatorias X y Z_n , $n \geq 1$, respectivamente. Entonces

$$\phi_n(t) = \phi^n(t), \quad (3.5)$$

donde

$$\phi^n(t) = \underbrace{(\phi \circ \phi \circ \dots \circ \phi)}_{n \text{ veces}}(t).$$

Demostración. Vamos a demostrar (3.5) por inducción en n . El caso $n = 1$ es claro porque

$$\phi_1(t) = \mathbb{E}(t^{Z_1}) = \mathbb{E}(t^X) = \phi(t).$$

Suponga que (3.5) vale para $n - 1$. De la definición de fgp

$$\phi_n(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = i) t^i. \quad (3.6)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_n = i) &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} X_k = i \mid Z_{n-1} = j\right) \mathbb{P}(Z_{n-1} = j) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^j X_k = i \mid Z_{n-1} = j\right) \mathbb{P}(Z_{n-1} = j) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^j X_k = i\right) \mathbb{P}(Z_{n-1} = j), \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde las sucesivas igualdades fueron obtenidas usando la definición de Z_n a partir de Z_{n-1} y la independencia entre las variables aleatorias X_i y Z_{n-1} . De (3.6) y (3.7) tenemos que

$$\phi_n(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^j X_k = i\right) t^i \right) \mathbb{P}(Z_{n-1} = j).$$

Pero

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^j X_k = i\right) t^i = \mathbb{E}(t^{\sum_{k=1}^j X_k}) = (\phi(t))^j,$$

entonces

$$\phi_n(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (\phi(t))^j \mathbb{P}(Z_{n-1} = j) = \phi_{n-1}(\phi(t)) = (\phi_{n-1} \circ \phi)(t).$$

De la hipótesis inductiva tenemos que

$$\phi_{n-1}(t) = \phi^{n-1}(t) = \underbrace{(\phi \circ \phi \circ \dots \circ \phi)}_{n-1 \text{ veces}}(t).$$

Esto completa la prueba. ■

A seguir listamos algunas propiedades que son clave para el estudio de la probabilidad de extinción del proceso de ramificación.

Proposición 3.2.2. Si $p_0 + p_1 < 1$, entonces ϕ satisface las siguientes propiedades.:

- i. ϕ es estrictamente convexa y creciente en $[0, 1]$;

- ii. $\phi(0) = p_0$ y $\phi(1) = 1$;
- iii. si $\phi'(1) \leq 1$ entonces $\phi(t) > t$ para $t \in [0, 1)$;
- iv. si $\phi'(1) > 1$ entonces $\phi(t) = t$ tiene una única raíz en $[0, 1)$;
- v. $\phi'(1) = m$.

3.3 Probabilidad de extinción

Estamos en condiciones de demostrar el resultado fundamental de los procesos de ramificación.

Teorema 3.3.1. *Sea $p_0 + p_1 < 1$. La probabilidad de extinción ρ del proceso de ramificación $(Z_n)_{n \geq 0}$ es la menor raíz no negativa de la ecuación $t = \phi(t)$. Además,*

$$\rho = 1 \text{ si, y solamente si, } m \leq 1.$$

Demostración. Vamos a dividir la prueba en dos partes. Primero vamos a probar que la probabilidad de extinción ρ satisface la ecuación $\rho = \phi(\rho)$. Para esto usamos propiedades del proceso y la continuidad de la función ϕ . En la segunda parte verificamos que ρ es la menor de las raíces de la ecuación anterior en $[0, 1]$. Esto será conseguido estudiando el comportamiento de la fgp de X .

Primera parte: vamos a mostrar que $\rho = \phi(\rho)$. Definimos, para todo $n \geq 0$,

$$\rho_n := \mathbb{P}(Z_n = 0).$$

Como $\{Z_n = 0\} \subseteq \{Z_{n+1} = 0\}$, para todo $n \geq 1$, la sucesión de eventos $(\{Z_n = 0\})_{n \geq 1}$ es no decreciente y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \rho. \quad (3.8)$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} \rho_n &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0 | Z_1 = i) \mathbb{P}(Z_1 = i | Z_0 = 1), && \text{(condicionando sobre la primer generación)} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (\mathbb{P}(Z_{n-1} = 0))^i p_i, && \text{(¿por qué?)} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (\rho_{n-1})^i p_i, && \text{(definición de } \rho_{n-1}\text{)} \\ &= \phi(\rho_{n-1}), && \text{(definición de } \phi\text{)}. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\rho_n = \phi(\rho_{n-1}). \quad (3.9)$$

Como ϕ es una función continua, resulta de (3.8) y (3.9) que $\rho = \phi(\rho)$.

Segunda parte: vamos a estudiar las soluciones de $t = \phi(t)$ usando propiedades de ϕ . En particular, vamos a analizar estas soluciones a partir del gráfico de $\phi(t)$ (Figura 3.2). De la Proposición 3.2.2 tenemos tres posibles comportamientos de ϕ , dependiendo de que (a) $\phi'(1) > 1$, (b) $\phi'(1) = 1$ o (c) $\phi'(1) < 1$.

En todos los casos existe como máximo dos valores, t_0 y 1, tales que $t = \phi(t)$. De la primer parte de la demostración de este teorema sabemos que ρ es raíz de esta ecuación. Entonces

- de (a) $\rho < 1$ o $\rho = 1$,

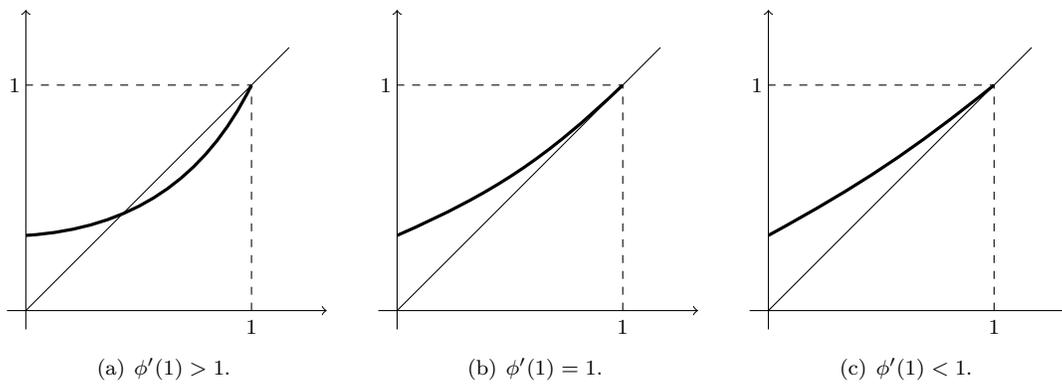


Figura 3.2: Comportamiento de $\phi(t)$.

- de (b) $\rho = 1$,
- de (c) $\rho = 1$.

Como $m = \phi'(1)$ concluimos de (b) y (c) que ρ es la menor raíz no negativa de $t = \phi(t)$ y que si $m \leq 1$ entonces $\rho = 1$. Basta estudiar el caso (a). Usaremos (3.9) para construir los valores ρ_i a partir del gráfico de la función ϕ . Observe que

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 0 \\ \rho_1 &= \phi(\rho_0) = \phi(0) = p_0 \\ \rho_2 &= \phi(\rho_1) = \phi(p_0) \\ &\vdots \end{aligned}$$

En la Figura 3.3 tenemos la construcción geométrica de estos valores a partir del gráfico de ϕ . Luego no es difícil verificar que los valores ρ_i convergen a la primera intersección de las curvas $y = t$ y $y = \phi(t)$. De (3.8), tenemos que debe ser $\rho = t_0$ y así ρ es la menor raíz de $t = \phi(t)$. En particular $\rho < 1$ cuando $m > 1$.

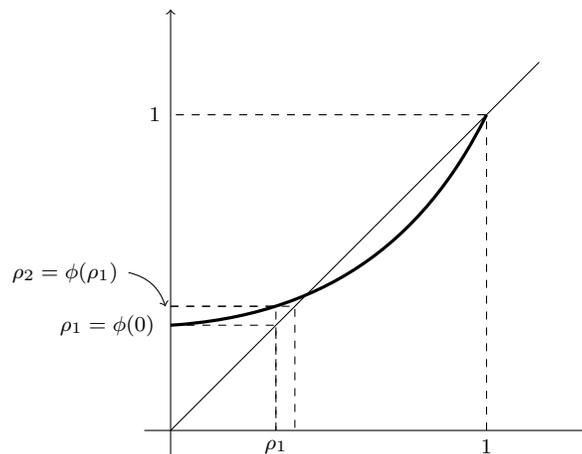


Figura 3.3: Construcción geométrica de los valores ρ_i y ρ .

■

Ejemplo 3.3.2. Suponga que $p_0 = 1/4$, $p_1 = 1/4$ y $p_2 = 1/2$. En este caso $m > 1$, entonces del Teorema 3.3.1 concluimos que $\rho < 1$. En particular,

$$\phi(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}t + \frac{1}{2}t^2$$

y q es la menor raíz de la ecuación $t = \phi(t)$. Como $t = \phi(t)$ si, y solamente si,

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

tenemos que $\rho = 1/2$. □

Ejemplo 3.3.3. Los procesos de ramificación de división binaria son importantes en biología. Este tipo de procesos son tales que

$$p_0 = 1 - p \quad \text{e} \quad p_2 = p,$$

para $p \in (0, 1)$. En este caso,

$$\phi(t) = 1 - p + pt^2$$

y $m = \phi'(1) = 2p$. Del Teorema 3.3.1 tenemos que $\rho = 1$ si $p \leq 1/2$ y $\rho = (1 - p)/p$ si $p > 1/2$. □

El siguiente ejemplo extraído de Grinstead y Snell [8] se refiere a datos reales compilados y analizados por Keyfitz en 1977¹.

Ejemplo 3.3.4. Volviendo a la motivación inicial de los procesos de ramificación estudiamos a seguir el linaje familiar de sexo femenino entre mujeres de una ciudad de Japón. Keyfitz estimó que la distribución del número de hijas de mujeres japonesas, de edades entre 45 y 49 años en 1960 está dada por la siguiente tabla:

p_0	=	0,2092
p_1	=	0,2584
p_2	=	0,2360
p_3	=	0,1593
p_4	=	0,0828
p_5	=	0,0357
p_6	=	0,0133
p_7	=	0,0042
p_8	=	0,0011
p_9	=	0,0002
p_{10}	=	0,0000

Figura 3.4: Distribución del número de hijas.

El número esperado de hijas en una familia está dado por 1,837 y entonces la probabilidad de extinción es $\rho < 1$. Del Teorema 3.3.1 podemos estimar que $\rho \approx 0,324$. □

Ejemplo 3.3.5. Suponga que $p_k = bp^{k-1}$, para $k = 1, 2, \dots$, y que

$$p_0 = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} p_i = \frac{1 - b - p}{1 - p}.$$

¹Keyfitz, N. *Introduction to the Mathematics of Population*, rev. ed. (Reading, PA: Addison Wesley), (1977).

En este caso, tenemos que la fgp de la variable aleatoria X está dada por

$$\phi(t) = \frac{1-b-p}{1-p} + \sum_{i=1}^{\infty} bp^{i-1}t^i = \frac{1-b-p}{1-p} + \frac{b}{p} \sum_{i=1}^{\infty} (pt)^i = 1 - \frac{b}{1-p} + \frac{bt}{1-pt}.$$

En particular,

$$m = \frac{b}{(1-p)^2}$$

y podemos aplicar el Teorema 3.3.1 para estudiar la probabilidad de extinción ρ . Si $m > 1$, $\rho < 1$ y es la menor raíz de la ecuación

$$t = 1 - \frac{b}{1-p} + \frac{bt}{1-pt}.$$

Esto es,

$$\rho = \frac{1-b-p}{p(1-p)}.$$

Por otro lado, podemos aplicar la Proposición 3.5 para obtener la distribución de Z_n (ver [2, I.4]). Cuando $m \neq 1$ tenemos que

$$\phi_n(t) = 1 - m^n \left(\frac{1-\rho}{m^n - \rho} + \frac{m^n \left(\frac{1-\rho}{m^n - \rho} \right)^2 t}{1 - \left(\frac{m^n - 1}{m^n - \rho} \right) t} \right), \quad (3.10)$$

y cuando $m = 1$ que

$$\phi_n(t) = \frac{np - (np + p - 1)t}{1 - p + np - npt}. \quad (3.11)$$

Luego podemos calcular las probabilidades $\mathbb{P}(Z_n = k)$ a partir de la fgp y de (3.4). Si $m \neq 1$ tenemos que

$$\mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - m^n \left(\frac{1-\rho}{m^n - \rho} \right)$$

mientras que, para $i \geq 1$

$$\mathbb{P}(Z_n = i) = m^n \left(\frac{1-\rho}{m^n - \rho} \right)^2 \left(\frac{m^n - 1}{m^n - \rho} \right)^{i-1}.$$

□

Observación 3.3.6. Procesos de ramificación como el presentado en el Ejemplo 3.3.5 pueden ser usados para estudiar la evolución de la descendencia de una familia. Un ejemplo dado por Lotka (1939)², bastante citado en la literatura (ver [6, 10, 20]), muestra que la distribución $p_0 = 0,4825$ y $p_k = (0,2126)(0,5893)^{k-1}$, para $k \geq 1$, es apropiada para describir la descendencia directa de hombres americanos (los valores numéricos están basados en un censo de 1920). Lotka aplicó el Teorema 3.3.1 para determinar que la probabilidad de extinción en este caso es $\rho = 0,819$.

Otro ejemplo interesante surge de analizar los datos del Ejemplo 3.3.4. En este caso podemos mostrar que la distribución $p_k = (0,3666)(0,5533)^{k-1}$ puede ser apropiada para describir los datos obtenidos (ver [8, Ejemplo 10.12, pág. 385]).

²Lotka, A. J. *Theorie analytique des associations biologiques*, Actualites scientifiques et industrielles 780, Paris, Hermann (1939), 123-136.

Problemas

3.1 Muestre que los eventos (3.2) y (3.3) son equivalentes.

3.2 Dadas dos variables aleatorias X y Y definimos la varianza condicional de X dado Y como

$$\mathbb{V}(X|Y) = \mathbb{E} \left([X - \mathbb{E}(X|Y)]^2 | Y \right).$$

Muestre que

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{V}[X|Y]) + \mathbb{V}(\mathbb{E}[X|Y]).$$

3.3 Demuestre la expresion para $\mathbb{V}(Z_n)$ dada en la Proposición 3.1.4. Sugerencia: usar $\mathbb{V}(Z_n) = \mathbb{E}(\mathbb{V}[Z_n|Z_{n-1}]) + \mathbb{V}(\mathbb{E}[Z_n|Z_{n-1}])$.

3.4 Pruebe (3.4).

3.5 Demuestre la Proposición 3.2.2.

3.6 Muestre que $\mathbb{P}(Z_n = 0 | Z_1 = i) = \mathbb{P}(Z_{n-1} = 0)^i$.

3.7 Analize el comportamiento de ρ cuando $p_0 + p_1 = 1$.

3.8 Considere la distribución del Ejemplo 3.3.5 y obtenga para $m = 1$ las probabilidades $\mathbb{P}(Z_n = i)$ a partir de (3.11) y (3.4).

3.9 Sea $(Z_n)_{n \geq 0}$ un proceso de ramificación. Encuentre la probabilidad de extinción ρ en función de r si $p_k = (1-r)r^k$.

3.10 Considere un proceso de ramificación para el cual $m > 1$ y $\rho = 1/2$. Suponga que el proceso comienza con 5 partículas. ¿Cual es la probabilidad de que el proceso sobreviva?

3.11 Suponga que una partícula da nacimiento a dos partículas con probabilidad $1/2$, a ninguna con probabilidad $1/4$ o a cuatro partículas con probabilidad $1/4$. Calcule la probabilidad de extinción del proceso de ramificación resultante.

3.12 **Desigualdad de Markov.** Sea X una variable aleatoria no negativa. Muestre que

$$\mathbb{P}(X > a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a},$$

para todo $a > 0$. Aplique esta desigualdad para probar que la probabilidad de extinción de un proceso de ramificación $\rho = 1$ si $m < 1$.

A Sucesiones monótonas de eventos

Si bien se asume para la lectura de estas notas conocimientos básicos de probabilidad. Por una cuestión de completitud, mencionamos en este apéndice un resultado que será bastante aplicado a lo largo del texto.

A.1 Continuidad de la probabilidad

Definición A.1.1. Decimos que una sucesión de eventos $(A_n)_{n \geq 1} \subset \Omega$ es:

- no decreciente, si para todo $n \geq 1$ vale que $A_n \subseteq A_{n+1}$;
- no creciente, si para todo $n \geq 1$ vale que $A_{n+1} \subseteq A_n$.

Teorema A.1.2. Sea $(A_n)_{n \geq 1} \subset \Omega$ una sucesión monótona de eventos. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right).$$

Demostración. Sea $(A_n)_{n \geq 1} \subset \Omega$ una sucesión no decreciente de eventos. Vamos a mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right). \quad (\text{A.1})$$

Como

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$$

entonces la sucesión de eventos B_1, B_2, \dots definida por $B_1 := A_1$ y

$$B_n := A_n - A_{n-1} = A_n \cap A_{n-1}^c$$

para todo $n \geq 2$, es tal que $B_i \cap B_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$ y

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Luego,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i). \quad (\text{A.2})$$

Ahora, note que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i) = \mathbb{P}(A_1) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=2}^n (\mathbb{P}(A_i) - \mathbb{P}(A_{i-1})). \quad (\text{A.3})$$

y como

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n (\mathbb{P}(A_i) - \mathbb{P}(A_{i-1})) &= [\mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1)] + [\mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_2)] + \dots + [\mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_{n-1})] \\ &= \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_1), \end{aligned}$$

resulta de (A.3) que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Por lo tanto, concluimos (A.1) de la expresión anterior y de (A.2). Suponga ahora que $(A_n)_{n \geq 0}$ sea una sucesión no creciente de eventos. Entonces $(A_n^c)_{n \geq 0}$ es una sucesión no decreciente y, de lo ya probado antes, vale que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n^c) = \mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n^c).$$

Aplicando propiedades básicas de probabilidad y teoría de conjuntos podemos concluir:

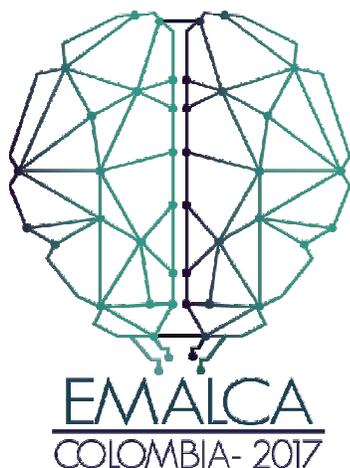
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} A_n). \tag{A.4}$$

■

Bibliografía

- [1] O. Alves, F. Machado & S. Popov. (2002) Phase transition for the frog model. *Electron. J. Probab.* **7** (21), pp. 16-21.
- [2] K.B. Athreya & P.E. Ney. *Branching Processes*. Springer-Verlag, New York, 1972.
- [3] Daley, D. J. & Kendall, D. G. (1964) Epidemics and Rumours. *Nature* **204**, p. 1118.
- [4] Daley, D. J. & Kendall, D. G. (1965) Stochastic rumours. *J. Inst. Math. Appl.* **1**, pp. 42-55.
- [5] A.W.F. Edwards. (1983) Pascal's Problem: The "Gambler's Ruin". *International Statistical Review* **51** (1), pp. 73-79.
- [6] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, vol. I, Third edition, John Wiley & Sons, 1968.
- [7] N. Gantert & P. Schmidt. (2009) Recurrence for the frog model with drift on \mathbb{Z} . *Markov Process. Related Fields* **15** (1), pp. 51-58.
- [8] C.M. Grinstead & J.L. Snell. *Introduction to Probability*. 2nd Revised Ed. AMS, 1997.
- [9] A. Gut. (2013) The gambler's ruin problem with delays. *Statistics and Probability Letters* **83**, pp. 2549-2552.
- [10] T. Harris. *The Theory of Branching Processes*. Springer-Verlag, Berlin, 1963.
- [11] B. Hayes. (2013) First links in the Markov chain. *American Scientist* **101**, pp. 92-97.
- [12] C. Hoffman, T. Johnson & M. Junge. (2016) From transience to recurrence with Poisson tree frogs. *Ann. Appl. Probab.* **26** (3), pp. 1620-1635.
- [13] P. Jagers. *Branching processes with biological applications*. John Wiley and Sons, 1975.
- [14] S. Karlin & H.M. Taylor. *An Introduction To Stochastic Modeling*. Third Edition, Academic Press, 1998.
- [15] D.G. Kendall. (1966) Branching processes since 1873. *Journal of the London Mathematical Society* **41**, pp. 385-406.
- [16] E. Lebensztayn & P.M. Rodriguez. (2013) A connection between a system of random walks and rumor transmission. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **392** (23), pp. 5793-5800.
- [17] S.Y. Popov. (2003) Frogs and some other interacting random walks models. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* **AC**, pp. 277-288.
- [18] S. Ross. (2009) A Simple Solution to a Multiple Player Gambler's Ruin Problem. *The American Mathematical Monthly* **116** (1), pp. 77-81.

- [19] S. Ross. Introduction to Probability Models, 10th Ed., Academic Press, 2010.
- [20] R.B. Schinazi. Classical and Spatial Stochastic Processes. Birkhäuser, Boston, 1999.



Esta primera Escuela de Matemáticas de América Latina y el Caribe, EMALCA-Colombia 2017 celebrada en la Universidad de Antioquia, no hubiera sido posible sin el apoyo en lo logístico, burocrático y personal de todos los funcionarios administrativos y profesores del Instituto de Matemáticas y la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.

Por otra parte, no podemos dejar de agradecer a los cursillistas y conferencistas que hicieron parte de esta Escuela. Sin su apoyo y dedicación nada de esto hubiera sido posible.

Agradecemos a nuestros participantes que se animaron a hacer parte de este importante ejercicio académico,

del cual esperamos sigan recogiendo frutos.

Y finalmente, nuestros más sinceros agradecimientos a los profesores Andrea Solotar y Ludovich Rifford como representantes de la UMALCA y CIMPA por su desinteresado apoyo.

A todos ellos nuestros más sinceros agradecimientos.

Esta escuela se llevó a cabo en las administraciones de Nora Restrepo, como Decana, Edwin Zarrazola, como Director del Instituto de Matemáticas y Omar Saldarriaga como Director de Posgrado en Matemáticas.

Pedro Hernández Rizzo
en nombre del Comité Organizador

Medellín, 6 de junio de 2017.

