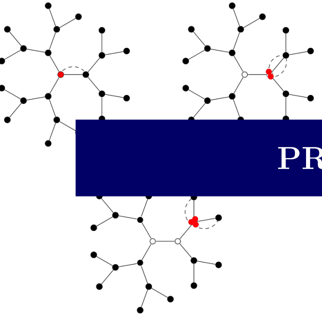
PGE977 - Tópicos Especiais em Processos Estocásticos

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE



PROBLEMAS DE PROBABILIDADE

Prof. Pablo M. Rodriguez

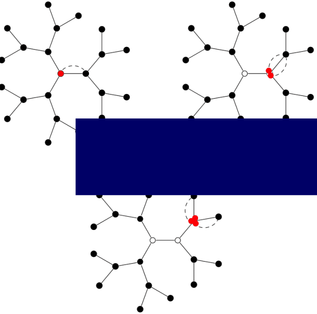
https://www.pablo-rodriguez.org

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

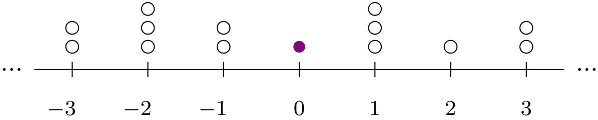
Conteúdo

- Motivação!
- Revisão:
  - Axiomas de probabilidade e propriedades.
  - Sequências monótonas de eventos.
  - Probabilidade condicional e independência.
  - Variáveis aleatórias discretas.



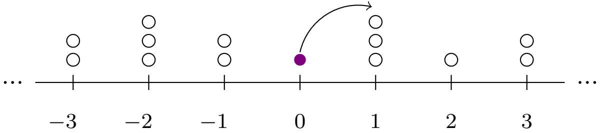
Motivação!

O modelo dos sapos



○ : sapo dormido ● : sapo acordado

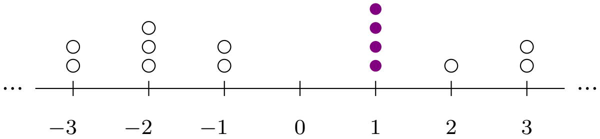
O modelo dos sapos



○ : sapo dormido

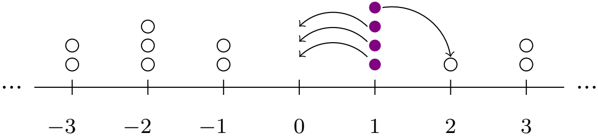
●: sapo acordado

O modelo dos sapos



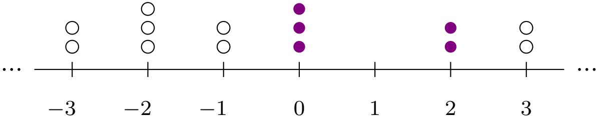
○ : sapo dormido ● : sapo acordado

O modelo dos sapos



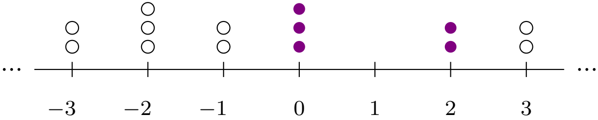
○ : sapo dormido ● : sapo acordado

O modelo dos sapos



○ : sapo dormido ● : sapo acordado

O modelo dos sapos



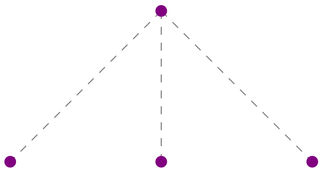
○ : sapo dormido

●: sapo acordado

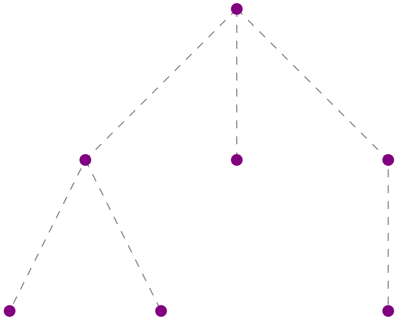
Pergunta: o 0 será visitado infinitas vezes?

Processo de ramificação

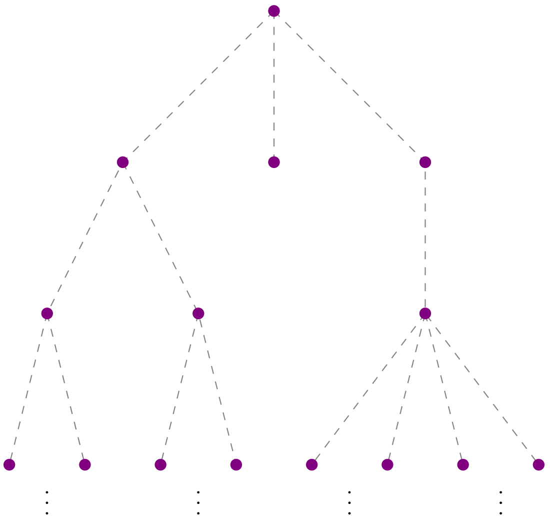
Processo de ramificação



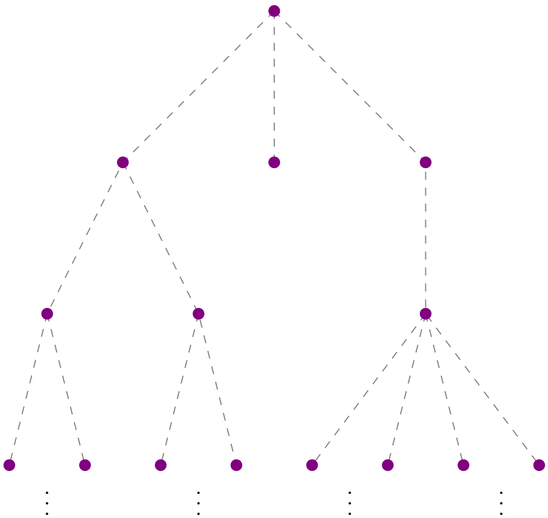
Processo de ramificação



Processo de ramificação

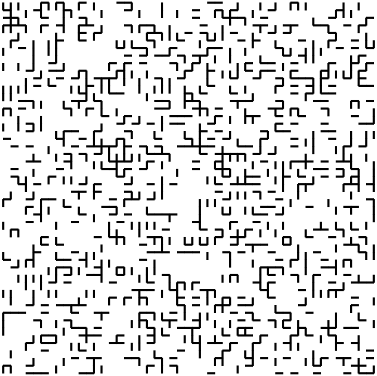


Processo de ramificação



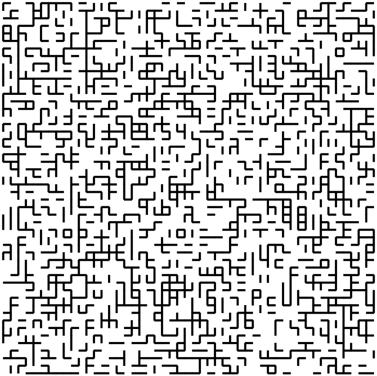
Pergunta: o processo continuara indefinidamente?

Modelo de percolação em $\mathbb{Z}^2$



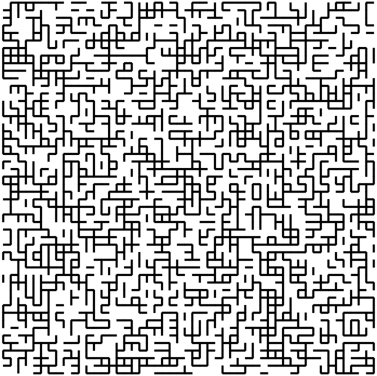
Realização do modelo de percolação de elos com $p = 0,25$.

Modelo de percolação em $\mathbb{Z}^2$



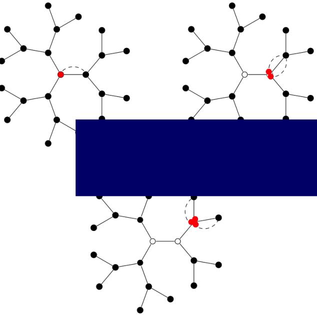
Realização do modelo de percolação de elos com $p = 0,40$.

Modelo de percolação em $\mathbb{Z}^2$



Realização do modelo de percolação de elos com $p = 0,50$.

Pergunta: existe um caminho ∞ de elos abertos?



Revisão

Espaço de probabilidade: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

conjunto arbitrário $\left\{ \begin{array}{c} \mathcal{P}(\Omega) \text{ é o conjunto} \\ \text{das partes de } \Omega \end{array} \right\}$

$$P : \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega \in \mathcal{F} \\ A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F} \\ A_n \in \mathcal{F}, n \geq 1 \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F} \end{array} \right\}$$

medida de probabilidade

$$\left\{ \begin{array}{l} P(A) > 0 \\ P(\Omega) = 1 \\ P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \end{array} \right\}$$

(para $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$)

σ-álgebra de subconjuntos de Ω

Propriedades

No que segue $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é espaço de probabilidade e $A, A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$.

As seguintes propriedades resultam dos axiomas:

1. $P(\emptyset) = 0$.
   - *Prova:* Note que $P(\emptyset) = P(\emptyset \cup \emptyset) \overset{\textbf{A3}}{=} 2P(\emptyset)$.
2. $P(A^c) = 1 - P(A)$.
   - *Prova:* $1 \overset{\textbf{A2}}{=} P(\Omega) = P(A \cup A^c) \overset{\textbf{A3}}{=} P(A) + P(A^c)$.
3. Se $A_1 \subset A_2$ então $P(A_1) \leq P(A_2)$.
   - *Prova:* Como $A_1 \subset A_2$ então $A_2 = A_1 \cup (A_2 \cap A_1^c)$. Logo,

$$P(A_2) = P(A_1 \cup (A_2 \cap A_1^c)) \overset{\textbf{A3}}{=} P(A_1) + \underbrace{P(A_2 \cap A_1^c))}_{\geq 0 \text{ por } \textbf{A1}} \geq P(A_1).$$

Propriedades

4. $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$.

   - *Prova:* Resulta de observar que

$$P(A_1) \overset{\mathbf{A3}}{=} P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_2^c),$$

$$P(A_2) \overset{\mathbf{A3}}{=} P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap A_1^c), \text{ e}$$

$$P(A_1 \cup A_2) \overset{\mathbf{A3}}{=} P(A_1 \cap A_2^c) + P(A_1 \cap A_2) + P(A_1^c \cap A_2).$$

Fórmula de inclusão-exclusão:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots \\ &(-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right). \end{aligned}$$

Propriedades

5. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

- *Prova:* Vamos reescrever $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ como uma união de eventos mutuamente exclusivos. Seja $B_1 := A_1$ e para cada $i \geq 2$ defina:

$$B_i := A_i \cap \left\{\bigcup_{k=1}^{i-1} A_k\right\}^c.$$

Assim, $B_i \cap B_j = \emptyset$ para $i \neq j$ e $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Então,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \stackrel{\mathbf{A3}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

pela construção dos B_i's!

verifique!

Problema 1

Mostre que $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.

Solução: Sabemos que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

ou, reescrevendo,

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B).$$

Como $P(A \cup B) \geq 1$ temos que

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

Sequências de eventos

Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de eventos definimos:

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{e} \quad \limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Quando

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = A$$

dizemos que A é o limite de A_n e o denotamos como $\lim_{n\to\infty} A_n := A$.

Observação

Se $A_n \in \mathcal{F}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *então* $\liminf_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{F}$ *e* $\limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Sequências monótonas de eventos

Dizemos que uma sequência de eventos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é:

(i) Não-decrescente, denotamos por $A_n \nearrow$, se

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \cdots$$

Nesse caso,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{ou seja} \quad A_n \nearrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

(ii) Não-crescente, denotamos por $A_n \searrow$, se

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \cdots$$

Nesse caso,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{ou seja} \quad A_n \searrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Continuidade da probabilidade

Teorema 1.1

Seja $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de eventos aleatórios.*

(i) *Se* $A_n \nearrow$ *então*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

(i) *Se* $A_n \searrow$ *então*

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Prova do Teorema 1.1. Vamos provar o item (i). Suponha que $A_n \nearrow$. A primeira tarefa será reescrever a união dos A_i's como uma união de eventos mutuamente exclusivos. Para isso, seja $B_1 := A_1$ e

$$B_n := A_n \cap A_{n-1}^c \quad \text{para todo } n \geq 2.$$

Desta forma $B_i \cap B_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Logo,

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \\
&\overset{\textbf{A3}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\{P(A_1) + \sum_{i=2}^{n} \left(P(A_i) - P(A_{i-1})\right)\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} P(A_n).
\end{aligned}$$

Observação

Para (ii) note que $A_n \searrow$ implica que $A_n^c \nearrow$. Depois use (i).

Probabilidade condicional

Lembrete!

No que segue se considera um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Seja $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{F}$ tal que $P(B) > 0$.

A probabilidade condicional de A dado B é definida por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Observação

Seja $B \in \mathcal{F}$ tal que $P(B) > 0$. Se $P_B : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$ é definida por

$$P_B(A) := P(A|B),$$

para todo $A \in \mathcal{F}$ então P_B é uma probabilidade em $\mathcal{F}$. De fato:

- Verifique **A1** e **A2** para P_B.
- **A3** vale pois se $A_n \in \mathcal{F}$, para $n \in \mathbb{N}$, e $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$, então

$$P_B\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \frac{P\left(\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\} \bigcap B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{A_n \cap B\}\right)}{P(B)}.$$

Logo

$$P_B\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(A_n \cap B)}{P(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} P_B(A_n).$$

Teorema da Multiplicação

Se $A_i \in \mathcal{F}$*, para todo* $i \in 1, \ldots, n$*. Então,*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\cdots P\left(A_n \middle| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right).$$

Observação

Para $A, B \in \mathcal{F}$ *o teorema diz que* $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$.

Prova do teorema: Por indução em n. Verificado para $n = 2$, note que

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(A_n \cap \left\{\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right\}\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) P\left(A_n \middle| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right).$$

Teorema da Probabilidade Total

Se $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$, *e a sequência forma uma partição de* Ω, *então*

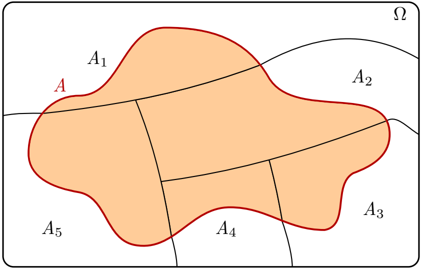
$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|A_i)P(A_i),$$

para todo $A \in \mathcal{F}$.

Observação

Para uma partição formada por n *eventos aleatórios, o resultado é obtido fazendo* $A_i = \emptyset$ *para todo* $i > n$.

Prova do Teorema da Probabilidade Total:

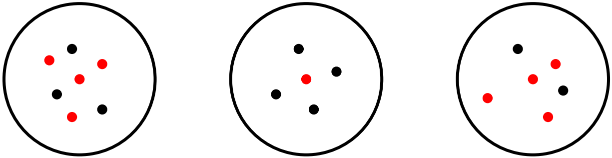


Como $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ é uma partição de Ω, então $A = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{A\cap A_i\}$ e a união é sobre eventos mutuamente exclusivos. Logo,

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\{A\cap A_i\}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A\cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|A_i)P(A_i).$$

Exemplo 1.1

Considere as seguintes urnas contendo bolas vermelhas e pretas:



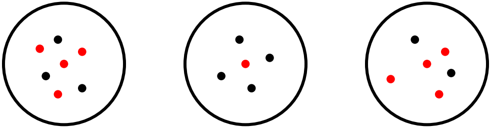
Urna 1 *Urna 2* *Urna 3*

Escolha ao acaso uma urna e, da urna escolhida, retire ao acaso uma bola observando sua cor. Calcule a probabilidade de que seja retirada uma bola vermelha.

... continuação do Exemplo 1.1. Considere os eventos

$$U_i = \text{“a urna } i \text{ é escolhida”}, \quad i \in \{1,2,3\}$$

$$V = \text{“a bola retirada é vermelha”}.$$



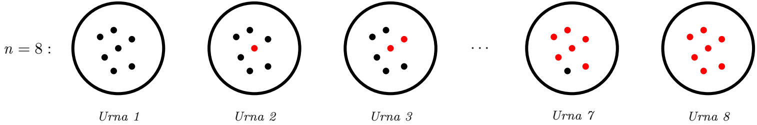
Urna 1 Urna 2 Urna 3

Como U_1, U_2, U_3 são uma partição de Ω temos que:

$$P(V) = \underbrace{P(V|U_1)}_{=4/7}\overbrace{P(U_1)}^{=1/3} + \underbrace{P(V|U_2)}_{=1/5}\overbrace{P(U_2)}^{=1/3} + \underbrace{P(V|U_3)}_{=2/3}\overbrace{P(U_3)}^{=1/3} \approx 0,48.$$

Exemplo 1.2

Considere n urnas sendo que a i-ésima urna contem $i-1$ bolas vermelhas e $n-i$ bolas pretas, $i \in \{1,\ldots,n\}$:

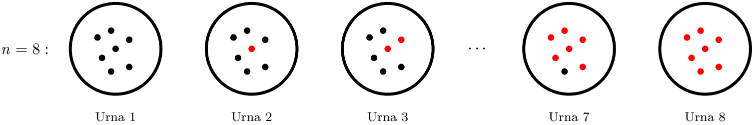


Escolha uma urna ao acaso e, da urna escolhida, retire ao acaso e sem reposição duas bolas. Calcule a probabilidade de que as bolas retiradas sejam de cores diferentes.

. . . continuação do Exemplo 1.2. Considere os eventos

$$U_i = \text{“a urna } i \text{ é escolhida”}, \quad i \in \{1, \ldots, n\}$$

$$V_i = \text{“a } i\text{-ésima bola retirada é vermelha”}, \quad i \in \{1, 2\}.$$



- Note que $P(V_1) = P(V_1^c)$,
- e que a probabilidade de interesse é dada por $2P(V_1 \cap V_2^c)$.

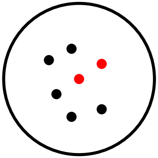
Mas,

$$P(V_1 \cap V_2^c) = \sum_{i=1}^{n} P(V_1 \cap V_2^c | U_i) P(U_i).$$

... continuação do Exemplo 1.2.

$$P(V_1 \cap V_2^c) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{P(V_1 \cap V_2^c | U_i)}_{= \frac{(i-1)(n-i)}{(n-1)(n-2)}} \overset{= 1/n}{P(U_i)}.$$

Urna i



$i - 1$ vermelhas

$n - i$ pretas

$$P(V_1 \cap V_2^c) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n} (i-1)(n-i)$$

- A probabilidade desejada é $2P(V_1 \cap V_2^c) = 1/3$.

Teorema de Bayes

Se $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$, *e a sequência forma uma partição de* Ω, *então para todo* $A \in \mathcal{F}$ *vale que*

$$P(A_i|A) = \frac{P(A|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A|A_i)P(A_i)},$$

para todo $i \in \mathbb{N}$.

Prova. Note que:

$$P(A_i|A) = \frac{P(A \cap A_i)}{P(A)}$$

Teorema de Bayes

Se $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$, e a sequência forma uma partição de Ω, então para todo $A \in \mathcal{F}$ vale que

$$P(A_i|A) = \frac{P(A|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A|A_i)P(A_i)},$$

para todo $i \in \mathbb{N}$.

Prova. Note que:

aplique T. da Multiplicação!

$$P(A_i|A) = \frac{P(A \cap A_i)}{P(A)}$$

Teorema de Bayes

Se $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$, *e a sequência forma uma partição de* Ω, *então para todo* $A \in \mathcal{F}$ *vale que*

$$P(A_i|A) = \frac{P(A|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A|A_i)P(A_i)},$$

para todo $i \in \mathbb{N}$.

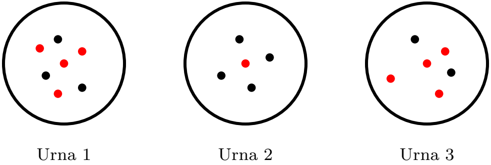
Prova. Note que:

aplique T. da Multiplicação!

$$P(A_i|A) = \frac{P(A \cap A_i)}{P(A)}$$

aplique T. da Probabilidade Total!

... Voltando ao Exemplo 1.1. Considere as seguintes urnas contendo bolas vermelhas e pretas, escolha ao acaso uma urna e, da urna escolhida, retire ao acaso uma bola observando sua cor.



Dado que uma bola vermelha é retirada, calcule a probabilidade de que a Urna 2 tenha sido a escolhida.

Usando notação de antes e T. de Bayes:

$$P(U_2|V) = \frac{P(V|U_2)P(U_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(V|U_i)P(U_i)}.$$

Problema 2

Mostre que se $A_i \bigcap A_j \neq \emptyset$ para $i \neq j$ e $P(B|A_n) \geq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$P\left(B \Big| \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq c.$$

Solução:

$$P\left(B \Big| \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \frac{P\left(B \cap \left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\}\right)}{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)} = \frac{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{B \cap A_n\}\right)}{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)},$$

mas

$$\frac{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{B \cap A_n\}\right)}{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} P(B \cap A_n)}{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} P(B|A_n)P(A_n)}{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)}.$$

Problema 2

... continuação: O fato de $P(B|A_n) \geq c$ garante que

$$P\left(B\Big|\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} P(B|A_n)P(A_n)}{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)} \geq \frac{\sum_{n=1}^{\infty} c\,P(A_n)}{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)} = c.$$

Problema 3

a) Mostre que $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} P(A_k^c)$.

Solução: Usamos que $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c\right)$ e que

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k^c).$$

b) Mostre que, se $P(A_k) \geq 1 - \epsilon$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$ então

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \geq 1 - n\epsilon.$$

Solução: Note que $P(A_k^c) \leq \epsilon$ e aplique o item anterior:

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} P(A_k^c) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} \epsilon = 1 - n\epsilon.$$

Problema 4

Se $A_n \searrow$ e $P(A_{n+1}|A_n) \leq 1/2$ prove que $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.

Solução: Note que

$$P(A_{n+1}|A_n) = \frac{P(A_{n+1} \cap A_n)}{P(A_n)} = \frac{P(A_{n+1})}{P(A_n)},$$

então $P(A_{n+1}|A_n) \leq 1/2$ implica que

$$\frac{P(A_{n+1})}{P(A_n)} \leq \frac{1}{2},$$

ou $P(A_{n+1}) \leq (1/2)P(A_n)$, que vale para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas

$$0 \leq P(A_{n+1}) \leq \frac{1}{2}P(A_n) \leq \frac{1}{2^2}P(A_{n-1}) \leq \cdots \leq \frac{1}{2^n}P(A_1) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Então, $0 \leq \lim_{n\to\infty} P(A_n) \leq \lim_{n\to\infty} (1/2^{n-1}) = 0$.

Independência

Seja $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{F}$.

Os eventos aleatórios A e B são independentes se:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Observação

Se $A \in \mathcal{F}$ e $P(A) \in \{0, 1\}$ então A é independente de B para todo $B \in \mathcal{F}$.

Proposição 1.1

A é independente de si mesmo se, e somente se, $P(A) \in \{0,1\}$.

Prova: Note que $P(A) = P(A \cap A)$, então:

$$A \text{ é independente de si mesmo} \Leftrightarrow P(A) = P(A)^2 \Leftrightarrow P(A) \in \{0,1\}.$$

Proposição 1.2

Se A e B são independentes então A e B^c também são independentes.

Prova:

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c)$$

por independência de A e B!

De forma geral

- Os eventos aleatórios $A_1, \ldots, A_n$ são ditos de independentes se:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}),$$

  para todo $k \in \{2, \ldots, n\}$ e $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$.

- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de eventos independentes se:

$$A_1, \ldots, A_n \text{ são independentes para todo } n \geq 2.$$

Observação

Não confundir com sequências de eventos independentes 2 a 2, para as quais vale apenas que $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$ *se* $i \neq j$.

Lembrete

Uma variável aleatória X é uma função $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\{X \leq x\} \in \mathcal{F}, \text{ para todo x } \in \mathbb{R}$$

Observação!

Usamos a seguinte notação: $\{X \leq a\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\}$.

Uma variável aleatória X é discreta se $X(\omega) \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ para todo $\omega \in \Omega$, para algum conjunto $\mathcal{S}$ finito ou enumerável. Neste caso

$$p(i) := P(X = i), i \in \mathcal{S},$$

é a função de probabilidade de X.

Esperança de uma v.a. discreta

A esperança de uma v.a. discreta X, com valores em $\mathcal{S}$ e função de probabilidade $p(x)$, é dada por

$$E(X) := \sum_{x \in \mathcal{S}} x\, p(x) = \sum_{x \in \mathcal{S}: x<0} x\, p(x) + \sum_{x \in \mathcal{S}: x \geq 0} x\, p(x),$$

... desde que pelo menos uma das somas seja finita. Caso contrário, dizemos que a esperança de X não existe.

Observação!

Note que ambas as somas são finitas se $\sum_{x \in \mathcal{S}} |x|\, p(x) < \infty$.

Distribuição Bernoulli

X tem *distribuição de Bernoulli* com parâmetro $p \in (0,1)$ se:

$$p(1) = p = 1 - p(0).$$

Notação: $X \sim Bernoulli(p)$.

Observação!

Um experimento com apenas dois resultados possíveis, sucesso ou fracasso, chama-se ensaio de Bernoulli.

Exemplo 1.3

Seja X a variável aleatória indicadora do evento A com $P(A) = p$:

$$X = \begin{cases} 1, & \textit{se } A \textit{ ocorre}, \\ 0, & \textit{se } A \textit{ não ocorre}. \end{cases}$$

Então $X \sim Bernoulli(p)$.

Distribuição Binomial

X tem *distribuição Binomial* com parâmetros $n \in \mathbb{N}$ e $p \in (0,1)$ se:

$$p(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \text{ para } i \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Notação: $X \sim B(n,p)$.

Observação!

X pode ser interpretada como o número de sucessos obtidos quando n ensaios independentes de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p, são realizados.

Observação!

Duas variáveis aleatórias X_1 e X_2 são independentes se para todo $B_1 \in \mathcal{B}$ e $B_2 \in \mathcal{B}$, os eventos aleatórios $\{X_1 \in B_1\}$ e $\{X_2 \in B_2\}$ são independentes.

Note que, para $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, por exemplo a configuração

$$\sigma : \quad \underset{1}{\underline{\checkmark}} \quad \underset{2}{\underline{\times}} \quad \underset{3}{\underline{\checkmark}} \quad \underset{4}{\underline{\times}} \quad \underset{5}{\underline{\checkmark}} \quad \cdots\cdots \quad \underset{n-3}{\underline{\times}} \quad \underset{n-2}{\underline{\checkmark}} \quad \underset{n-1}{\underline{\times}} \quad \underset{n}{\underline{\checkmark}}$$

i sucessos ($\checkmark$)

$n - i$ fracassos ($\times$)

é favorável para a ocorrência de $\{X = i\}$. Como temos $\binom{n}{i}$ formas diferentes de obter uma configuração destas e como

$$P(\sigma) = p^i (1-p)^{n-i},$$

por independência!

concluímos que

$$P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}.$$

Se $X \sim B(n, p)$ podemos escrever

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

em que $X_1, \ldots, X_n$ são i.i.d. com $X_1 \sim Bernoulli(p)$.

Observação!

A notação i.i.d. é usada para dizer que as variáveis são independentes e identicamente distribuídas.

Grafo aleatório de Erdős-Rényi

Considere n vértices e assuma que cada par de vértices é conectado, independentemente dos outros pares, com probabilidade p. O modelo resultante chama-se grafo aleatório de Erdős-Rényi e denota-se por $G(n,p)$. Se $i \in \{1,\ldots,n\}$ é um vértice do grafo e D_i denota o número de vértices conectados com i em $G(n,p)$ (i.e., D_i é o grau de i) então $D_i \sim B(n-1,p)$.

De fato, note que, fixando i, se

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } j \text{ está conectado com } i, \\ 0, & \text{se } j \text{ não está conectado com } i, \end{cases}$$

então as variáveis aleatórias X_{ij}, $j \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{i\}$, são i.i.d. com $X_{ij} \sim Bernoulli(p)$. Além disto:

$$D_i = \sum_{j \neq i} X_{ij}.$$

Distribuição de Poisson

X tem *distribuição de Poisson* com parâmetro $\lambda \in (0, \infty)$ se:

$$p(i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}, \text{ para } i \in \{0, 1, \ldots\}.$$

Notação: $X \sim Poisson(\lambda)$.

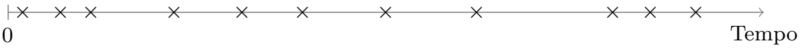
Observação!

X pode ser interpretada como uma aproximação para o número de sucessos obtidos quando n ensaios independentes de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p, são realizados, assumindo valores grandes de n e pequenos de p.

Processo de Poisson de parâmetro λ

Usado para representar, principalmente, os instantes de ocorrência de eventos de interesse (terremotos em uma região, ligações telefônicas recebidas por uma central, chegadas de clientes em um sistema etc).

Um Processo de Poisson de parâmetro λ unidimensional pode ser representado como uma sequência de pontos ou marcas em $\mathbb{R}^+$:



tais que, se $N(B)$ = número de pontos contidos no intervalo $B \subset \mathbb{R}^+$, então:

- $N(B) \sim Poisson(\lambda|B|)$;
- $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^+$ intervalos, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, então $N(B_1)$ e $N(B_2)$ são independentes.

Observação!

Podemos estender o anterior para qualquer $B \in \mathcal{B}$, com $|B|$ representando a medida de Lebesgue de B.

Distribuição Geométrica

X tem *distribuição geométrica* com parâmetro $p \in (0,1)$ se:

$$p(i) = p(1-p)^{i-1}, \text{ para } i \in \mathbb{N}.$$

Notação: $X \sim Geom(p)$.

Observação!

X pode ser interpretada como o número de ensaios independentes de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p, que devem ser realizados até obter o primeiro sucesso.

Pensando na interpretação de X, note que se

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se o } i\text{-ésimo ensaio resulta em sucesso,} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para todo $i \in \mathbb{N}$, então:

$$P(X = i) = P\left(\left\{\bigcap_{k=1}^{i-1} \{X_k = 0\}\right\} \cap \{X_i = 1\}\right) = (1-p)^{i-1} p.$$

por independência!

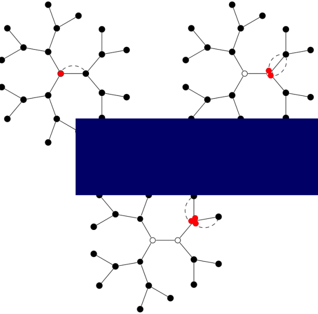
Problema da coleção de cupons

Existem n tipos de cupons e cada vez que um colecionador pega um cupom, este tem, independentemente das seleções anteriores, a mesma probabilidade de ser de qualquer um dos n tipos. Uma variável aleatória de interesse é o número de cupons que precisam ser recolhidos até obter uma coleção completa de pelo menos um cupom de cada tipo. Se X é esta variável aleatória encontre $E(X)$.

Solução: Podemos escrever $X = \sum_{i=1}^{n} T_i$, em que $T_1, T_2, \ldots, T_n$ são variáveis aleatórias independentes com

$$T_i \sim Geom\left(\frac{n-i+1}{n}\right),$$

para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Logo $E(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n}{n-i+1}\right)$.



Bom estudo!