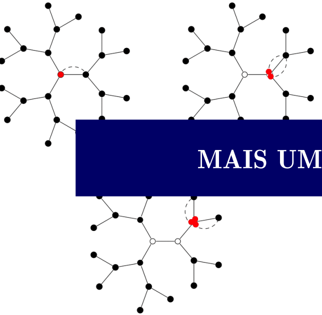
ET581 - Probabilidade 1

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE



MAIS UM POUCO DE DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS

Prof. Pablo M. Rodriguez

https://www.pablo-rodriguez.org/et581-probabilidade1

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo da Aula 21

- Distribuições clássicas: exemplos.
- Outras distribuições.

Distribuição Bernoulli

X tem *distribuição de Bernoulli* com parâmetro $p \in (0,1)$ se:

$$p(1) = p \quad \text{e} \quad p(0) = 1 - p.$$

Notação: $X \sim Bernoulli(p)$. Lembre que: $E(X) = p$ e $Var(X) = p(1-p)$.

Observação!

Um experimento com apenas dois resultados possíveis, sucesso ou fracasso, chama-se ensaio de Bernoulli.

Exemplo 21.1

Seja X a variável aleatória indicadora do evento A com $P(A) = p$:

$$X = \begin{cases} 1, & \textit{se } A \textit{ ocorre}, \\ 0, & \textit{se } A \textit{ não ocorre}. \end{cases}$$

Então $X \sim Bernoulli(p)$.

Independência de variáveis aleatórias

Duas variáveis X e Y são independentes se, para todo par de subconjuntos $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{F}$, os eventos

$$\{X \in A\} \quad \text{e} \quad \{Y \in B\}$$

são independentes. De forma natural estendemos esta definição para n variáveis aleatórias; i.e., usando a definição de independência de n eventos.

- Sejam X e Y duas variáveis aleatórias discretas. X e Y são independentes se, e somente se, para todo i, j vale que

$$P(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = P(X = i)P(Y = j).$$

Distribuição Binomial

X tem *distribuição Binomial* com parâmetros $n \in \mathbb{N}$ e $p \in (0,1)$ se:

$$p(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \text{ para } i \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Notação: $X \sim B(n,p)$. Lembre que: $E(X) = np$ e $Var(X) = np(1-p)$.

Observação!

X pode ser interpretada como o número de sucessos obtidos quando n ensaios independentes de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p, são realizados.

Se $X \sim B(n, p)$ podemos escrever

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

em que $X_1, \ldots, X_n$ são i.i.d. com $X_1 \sim Bernoulli(p)$.

Observação!

A notação i.i.d. é usada para dizer que as variáveis são independentes e identicamente distribuídas.

Problema 1

Exercício 4.46 do Ross. Suponha que sejam necessários pelo menos 9 votos de um júri formado por 12 jurados para que um réu seja condenado. Suponha também que a probabilidade de que um jurado vote na inocência de uma pessoa culpada seja de $0,2$, enquanto a probabilidade de que o jurado vote na culpa de uma pessoa inocente seja de $0,1$. Se cada jurado age independentemente e se 65% dos réus são culpados, determine a probabilidade de que o júri chegue a conclusão correta. Que percentual de réus é condenado?

Solução. Considere os eventos:

- R =“o réu é condenado”,
- I =“o réu é inocente”,
- C =“o réu é culpado”
- A =“o juri chega ’a decisão correta”.

e note que devemos calcular: $P(A)$ e $P(R)$.

... continuação do Problema 1. Para calcular $P(A)$ note que

$$P(A) = P(A|I)P(I) + P(A|C)P(C)$$

mas $P(C) = 0,65$, $P(I) = 1 - P(C) = 0,35$, e por outro lado:

$$P(A|C) = P(X \geq 9)$$

onde $X \sim B(12; 0,8)$, enquanto que

$$P(A|I) = P(Y \leq 8)$$

onde $Y \sim B(12; 0,1)$. Já para $P(R)$ temos que:

$$P(A) = P(R|I)P(I) + P(R|C)P(C)$$

mas $P(R|I) = P(Y \geq 9)$, enquanto que $P(R|C) = P(X \geq 9)$.

... finalizar!

Distribuição de Poisson

X tem *distribuição de Poisson* com parâmetro $\lambda \in (0, \infty)$ se:

$$p(i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}, \text{ para } i \in \{0, 1, \ldots\}.$$

Notação: $X \sim Poisson(\lambda)$. Lembre que: $E(X) = Var(X) = \lambda$.

Observação!

X pode ser interpretada como uma aproximação para o número de sucessos obtidos quando n ensaios independentes de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p, são realizados, assumindo valores grandes de n e pequenos de p.

Aplicação

Uma variável aleatória com distribuição de Poisson pode ser usada de aproximação para fenômenos que ocorrem ao longo do tempo como por exemplo:

- O número de terremotos que ocorrem durante um período de tempo fixo;
- O número de mortes, em dado período de tempo, de segurados de uma companhia que vende seguros de vida;
- O número de clientes que entra em uma loja durante um certo intervalo de tempo.

Exemplo 21.2

Suponha que terremotos ocorram numa certa região de acordo com as seguintes hipóteses: se $N(s,t)$ representa o número de terremotos que ocorrem em uma janela de tempo (s,t), com $s < t$, tendo como unidade de tempo o intervalo de 1 semana, então

- $N(s,t) \sim Poisson(2(t-s))$,
- $N(s,t)$ *e* $N(x,y)$ *são independentes sempre que* $t < x$.

Note que segundo estas hipóteses temos que terremotos ocorrem em uma taxa de 2 por semana.

a. *Determine a probabilidade de que pelo menos 3 terremotos ocorram durante as próximas 2 semanas.*

b. *Determine a distribuição de probabilidade do tempo, começando de agora, até a ocorrência do próximo terremoto.*

Continuação do Exemplo 21.2. Para responder (a) note que devemos calcular:

$$\begin{aligned} P(N(0,2) \geq 3) &= 1 - P(N(0,2) \leq 2) \\ &= 1 - P(N(0,2)=0) - P(N(0,2)=1) - P(N(0,2)=2) \\ &= 1 - e^{-4} - e^{-4}4 - e^{-4}\frac{4^2}{2!} \\ &= 1 - 13e^{-4}. \end{aligned}$$

Para (b) suponha que X represente a quantidade de tempo (em semanas) até que ocorra o próximo terremoto. Como X será maior que t se, e somente se, nenhum evento ocorrer nas próximas t unidades de tempo, então:

$$P(X > t) = P(N(0,t) = 0) = e^{-2t}$$

e assim a função distribuição de probabilidades de X é dada por:

$$F_X(t) = 1 - e^{-2t}.$$

Distribuição Geométrica

X tem *distribuição geométrica* com parâmetro $p \in (0,1)$ se:

$$p(i) = p(1-p)^{i-1}, \text{ para } i \in \mathbb{N}.$$

Notação: $X \sim Geom(p)$. Lembre que: $E(X) = 1/p$ e $Var(X) = (1-p)/p^2$.

Observação!

X pode ser interpretada como o número de ensaios independentes de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p, que devem ser realizados até obter o primeiro sucesso.

Exemplo 21.3

Uma urna contém 3 bolas brancas e 5 bolas pretas. As bolas são selecionadas aleatoriamente, uma de cada vez, até que saia uma bola preta. Se supormos que cada bola selecionada seja substituída antes que a próxima bola seja retirada, qual é a probabilidade de que

a. *sejam necessárias exatamente n retiradas?*

b. *sejam necessárias pelo menos k retiradas?*

Seja X o número de retiradas necessárias até que se selecione uma bola preta. Então $X \sim Geometrica(p)$ com $p = 5/8$. Portanto, para responder (a) temos

$$P(X = n) = \left(\frac{3}{8}\right)^{n-1} \frac{5}{8},$$

enquanto que para (b) temos

$$P(X \geq k) = \frac{5}{8} \sum_{n=k}^{\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^{n-1} = \frac{5}{8} \left\{ \frac{(3/8)^{k-1}}{1 - (3/8)} \right\} = \left(\frac{3}{8}\right)^{k-1}.$$

Distribuição Hipergeométrica

X tem *distribuição hipergeométrica* com parâmetros n, N, m se:

$$p(i) = \frac{\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}}, \text{ para } i \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Notação: $X \sim H(n, N, m)$.

Observação!

Se uma amostra de tamanho n é escolhida aleatoriamente (sem devolução) de uma urna contendo N bolas, das quais m são brancas e $N - m$ são pretas, então X pode ser interpretada como o número de bolas brancas selecionadas

Seja $X \sim H(n, N, m)$.

- $p(i)$ será igual a 0 a menos que i seja tal que:

$$n - (N - m) \leq i \leq \min(n, m).$$

- Neste caso:

$$E(X) = \frac{nm}{N}$$

e

$$Var(X) = \frac{nm}{N}\left\{\frac{(n-1)(m-1)}{N-1} + 1 - \frac{nm}{N}\right\}.$$

Ver Exemplo 8j do Ross (pág. 203)!

Distribuição Binomial Negativa

X tem *distribuição Binomial negativa* com parâmetros (r, p), com $r \in \mathbb{N}$ e $p \in (0, 1)$ se:

$$p(i) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}, \text{ para } n \in \{r, r+1, r+2, \ldots\}.$$

Notação: $X \sim BN(r, p)$.

Observação!

X pode ser interpretada como o número de ensaios independentes de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p, que devem ser realizados até obter o r-ésimo sucesso.

Neste caso: $E(X) = \dfrac{r}{p}$ e $Var(X) = \dfrac{r(1-p)}{p^2}$.

Ver Exemplo 8f do Ross (pág. 199)!

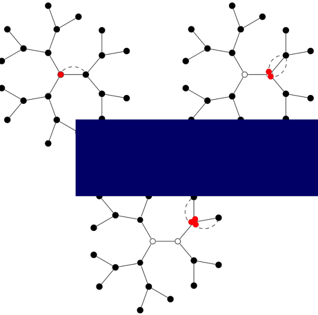
Referência!

Ross, S. Probabilidade: Um curso moderno com aplicações, 8a ed., Bookman, 2010.

Exercícios:

- Capítulo 4 (Ross):
  1. 4.7, 4.20 (pág. 224 a 226, exercícios teóricos).
  2. 4.2, 4.3, 4.5, 4.13, 4,14 (pág. 228 a 230, problemas de autoteste).

Lista Prova 3: Realizar o exercício 4.20 (do item (1)) e escolher mais 3 exercícios, dos indicados acima, para entregar sua resolução justificada de forma clara até o dia 26/08 às 18h00 por e-mail ou Whatsapp.



Bom estudo!