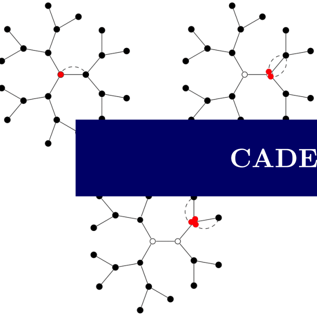
PGE966 - Processos Estocásticos

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE



CADEIAS DE MARKOV A TEMPO DISCRETO

Prof. Pablo M. Rodriguez

https://www.pablo-rodriguez.org

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN
Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo

- Cadeias de Markov a tempo discreto.
- Probabilidades de transição e equações de Chapman-Kolmogorov.
- Recorrência e transiência.

Processo estocástico

Um processo estocástico a tempo discreto é uma sequência de variáveis aleatórias:

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$$

ou $(X_n)_{n\geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$, definidas no mesmo espaço de probabilidade e tomando valores em algum conjunto enumerável S.

Observação

O conjunto $\mathcal{S}$ chama-se espaço de estados do processo e cada um dos seus elementos chama-se estado.

Propriedade Markoviana e Cadeia de Markov

Uma cadeia de Markov a tempo discreto (CMTD) com espaço de estados $\mathcal{S}$ é um processo estocástico $(X_n)_{n\geq 0}$ com valores em $\mathcal{S}$ tal que

$$\underbrace{P(X_{n+1}}_{\text{futuro}} = j | \underbrace{X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}}_{\text{pasado}}, \underbrace{X_n}_{\text{presente}} = i) = P(X_{n+1} = j | X_n = i),$$

para todo $n \geq 0$ e para todo subconjunto $\{i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i, j\} \subset \mathcal{S}$.

Nota!

O início da teoria das cadeias de Markov remonta-se a 1913, com o trabalho do matemático ruso A.A. Markov. Markov passou horas estudando os padrões de vogais e consoantes de uma novela de Alexander Pushkin e, embora sua análise não aportou muito ao estudo da literatura da época, suas ideias deram origem ao que conhece-se como cadeias de Markov (Hayes, 2013).

Supomos que para todo $i, j \in \mathcal{S}$ e para todo $n \geq 0$ as probabilidades

$$p(i,j) := P(X_{n+1} = j | X_n = i),$$

chamadas probabilidades de transição não dependem de n. Neste caso dizemos que a cadeia de Markov é homogênea.

Note que $p(i,j) \in [0,1]$ e que

$$\sum_{j \in \mathcal{S}} p(i,j) = 1.$$

Uma cadeia de Markov pode ser completamente determinada pelas probabilidades de transição e pela distribuição do seu estado inicial:

$$\text{se } P(X_0 = i) = \alpha_i, \text{ para todo } i \in \mathcal{S}, \text{ com } \alpha_i \in [0,1] \text{ e } \sum_{i \in \mathcal{S}} \alpha_i = 1,$$

então

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = \alpha_{i_0}\, p(i_0, i_1)\, p(i_1, i_2)\, \ldots\, p(i_{n-1}, i_n).$$

Exemplo 1: o processo de ramificação

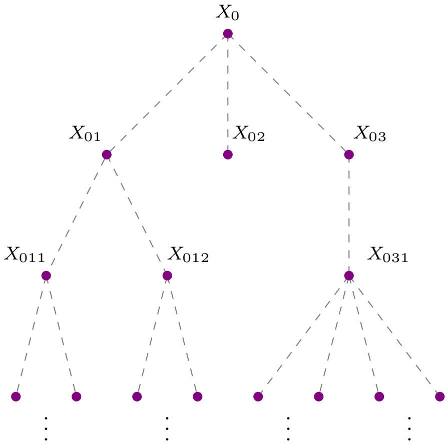
Considere uma variável aleatória discreta X com função de probabilidade

$$P(X = i) = p_i,$$

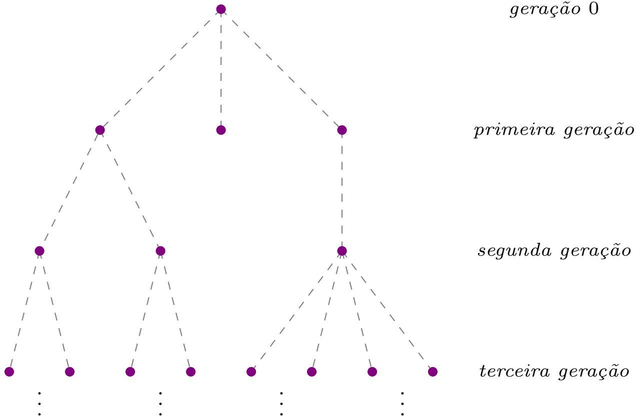
para $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

No que segue, todas as variáveis são cópias independentes de X.

Processo de ramificação: ideia



Processo de ramificação: gerações



Processo de ramificação: a cadeia de Markov

Considere, para cada $n \geq 0$, a variável aleatória:

$$Z_n = \# \text{ de partículas da } n\text{-ésima geração},$$

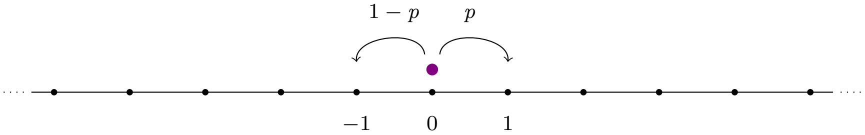
e note que para todo $n \geq 1$ temos:

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i,$$

onde $X_1, X_2, \ldots$ são i.i.d. à v.a. X. A sequência $(Z_n)_{n\geq 0}$ chama-se processo de ramificação ou processo de Galton-Watson e é uma cadeia de Markov com espaço de estados $\mathbb{N} \cup \{0\}$ e probabilidades de transição:

$$p(i,j) = P(Z_{n+1} = j | Z_n = i) = \begin{cases} P\left(\sum_{r=1}^{i} X_r = j\right), & \text{para } i \geq 1 \text{ e } j \geq 0, \\ 0, & \text{para } i = 0 \text{ e } j > 0, \\ 1, & \text{para } i = 0 \text{ e } j = 0. \end{cases}$$

Exemplo 2: o passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



O passeio aleatório em $\mathbb{Z}$

Consideramos a sequência de v.a. i.i.d. $X_1, X_2, X_3, \ldots$ tal que

$$P(X_1 = 1) = p = 1 - P(X_1 = -1).$$

Se Y_n denota a posição da partícula no n-ésimo instante de tempo, então

$$Y_n = Y_{n-1} + X_n, \quad \text{para todo } n \in \{1, 2, \ldots\}.$$

A sequência $(Y_n)_{n\geq 0}$ chama-se passeio aleatório em $\mathbb{Z}$ e é uma cadeia de Markov com espaço de estados $\mathbb{Z}$ e probabilidades de transição:

$$p(i,j) = P(Y_{n+1} = j | Y_n = i) = \begin{cases} p, & \text{para } j = i+1, \\ 1-p, & \text{para } j = i-1, \\ 0, & \text{para } j \neq i \pm 1. \end{cases}$$

Exemplo 3: modelo de rumor de Daley-Kendall

[Daley e Kendall, 1964]

$\downarrow$

Epidemics and Rumours. Nature 204 (1964), 1118.

Stochastic Rumours. J. Inst. Maths Applics 1 (1964), 42-55.

"let's keep it simpler and leave it to others to think of variations" was Kendall's advice (Daryl Daley. Comunicação pessoal, 2019)

[Maki e Thompson, 1973]

$\downarrow$

Mathematical Models and Applications. Prentice-Hall, N.J. (1973).

Primeiras considerações: a população

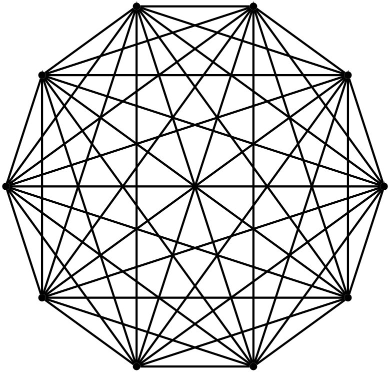


Figura: Grafo completo $\mathbb{K}_{10}$.

Primeiras considerações: a população

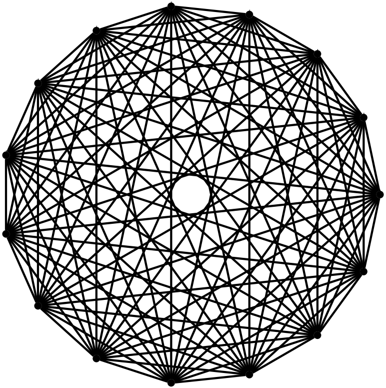
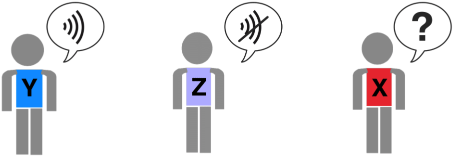


Figura: Grafo completo $\mathbb{K}_{15}$.

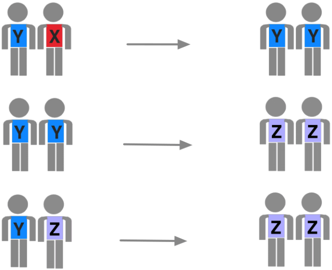
Primeiras considerações: tipos de indivíduos



Propagadores	Neutros	Ignorantes
(Spreaders)	*(Stiflers)*	*(Ignorants)*

Primeiras considerações: interações

- Pares de indivíduos interagem em tempos $i.i.d.$ $Exp(1)$.
- Ocorrem as seguintes transições:



Modelo de Daley-Kendall a tempo discreto

Para cada $n \geq 0$, consideramos as variáveis aleatórias:

- X_n = número de ignorantes no tempo n,
- Y_n = número propagadores no tempo n,
- Z_n = número de neutros no tempo n.

Supomos que $X_0 = N - 1,\ Y_0 = 1,\ Z_0 = 0$ e que

$$X_n + Y_n + Z_n = N$$

para todo $n \geq 0$, o que representa que a população é fechada.

Modelo de Daley-Kendall a tempo discreto

O modelo de Daley-Kendall a tempo discreto é a CMTD $(V_n)_{n\geq 0}$,

$$V_n := (X_n, Y_n, Z_n),$$

com espaço de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, \ldots, N\}^3$ e transições dadas por:

$$(i,j,k) \to (i-1, j+1, k) \quad \ldots \text{ com probabilidade } = \frac{i\,j}{\binom{N}{2}}$$

$$(i,j,k) \to (i, j-1, k+1) \quad \ldots \text{ com probabilidade } = \frac{j\,k}{\binom{N}{2}}$$

$$(i,j,k) \to (i, j-2, k+2) \quad \ldots \text{ com probabilidade } = \frac{\binom{j}{2}}{\binom{N}{2}}$$

$$(i,j,k) \to (i, j, k) \quad \ldots \text{ com probabilidade } = \frac{\binom{i}{2} + \binom{k}{2} + i\,k}{\binom{N}{2}}$$

Em outras palavras:

$$P\left((X_{n+1},\, Y_{n+1},\, Z_{n+1}) = (i-1, j+1, k) \middle| \, (X_n,\, Y_n,\, Z_n) = (i,j,k)\right) = \frac{i\,j}{\binom{N}{2}};$$

$$P\left((X_{n+1},\, Y_{n+1},\, Z_{n+1}) = (i, j-1, k+1) \middle| \, (X_n,\, Y_n,\, Z_n) = (i,j,k)\right) = \frac{j\,k}{\binom{N}{2}};$$

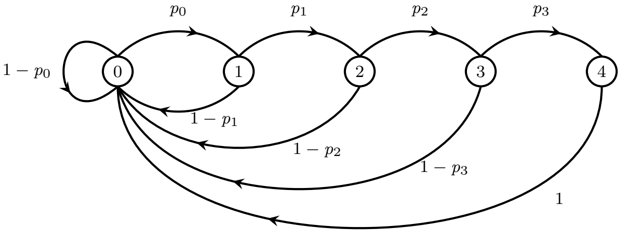
$$P\left((X_{n+1},\, Y_{n+1},\, Z_{n+1}) = (i, j-2, k+2) \middle| \, (X_n,\, Y_n,\, Z_n) = (i,j,k)\right) = \frac{\binom{j}{2}}{\binom{N}{2}}.$$

$$P\left((X_{n+1},\, Y_{n+1},\, Z_{n+1}) = (i, j, k) \middle| \, (X_n,\, Y_n,\, Z_n) = (i,j,k)\right) = \frac{\binom{i}{2} + \binom{k}{2} + i\,k}{\binom{N}{2}}.$$

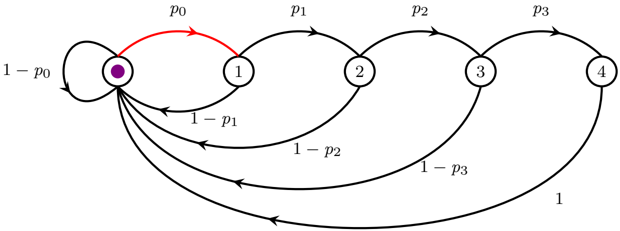
Observação

Para formular a versão discreta a partir da continua note que se $X_1, \ldots, X_n$ *são i.i.d. com distribuição comum* $Exp(\lambda)$ *então* $P\left(X_i < \min_{j \neq i}\{X_j\}\right) = 1/n$.

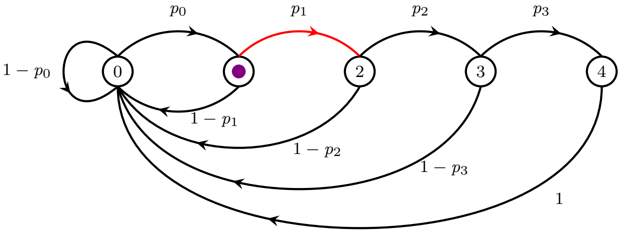
Exemplo 4: passeio aleatório em um grafo finito



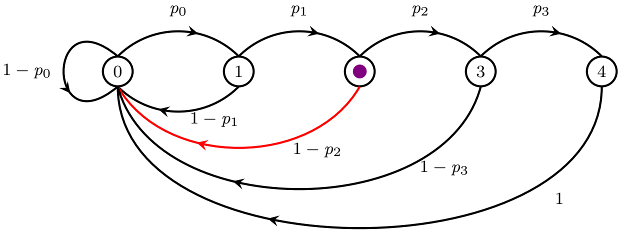
Exemplo 4: passeio aleatório em um grafo finito



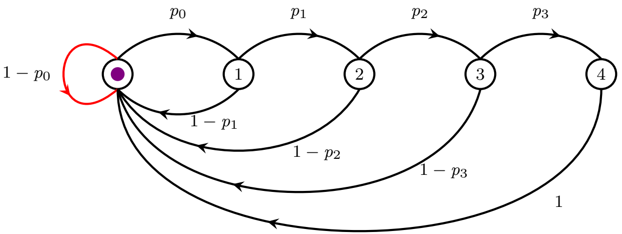
Exemplo 4: passeio aleatório em um grafo finito



Exemplo 4: passeio aleatório em um grafo finito



Exemplo 4: passeio aleatório em um grafo finito



O passeio aleatório em um grafo finito orientado

Se Y_n denota a posição da partícula no n-ésimo instante de tempo,

... então a sequência $(Y_n)_{n\geq 0}$ chama-se passeio aleatório no grafo considerado e é uma cadeia de Markov com espaço de estados $\{0,1,2,3,4\}$ e probabilidades de transição:

$$p(i,j) = P(Y_{n+1} = j | Y_n = i) = \begin{cases} p_i, & \text{para } j = i+1 \text{ e } i \in \{0,1,2,3\}, \\ 1-p_i, & \text{para } j = 0 \text{ e } i \in \{0,1,2,3\}, \\ 1, & \text{para } j = 0 \text{ e } i = 4, \\ 0, & \text{para qualquer outro caso.} \end{cases}$$

Matriz de transição

Podemos reunir a informação das probabilidades de transição em uma matriz P, chamada matriz de transição, cujas entradas são os valores $p(i,j)$. Se $|\mathcal{S}| = n$, a matriz de transição é dada por:

$$P := \begin{bmatrix} p(1,1) & p(1,2) & p(1,3) & \dots & p(1,n) \\ p(2,1) & p(2,2) & p(2,3) & \dots & p(2,n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p(n,1) & p(n,2) & p(n,3) & \dots & p(n,n) \end{bmatrix}.$$

Lembre que se $i,j \in \mathcal{S}$ então $p(i,j) \in [0,1]$ e $\sum_{j \in \mathcal{S}} p(i,j) = 1$.

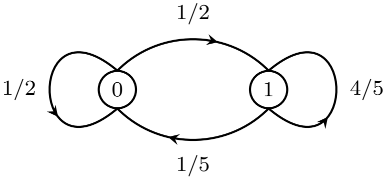
Uma matriz com estas propriedades chama-se matriz estocástica.

Representação gráfica de uma cadeia de Markov

Considere a CMTD $(X_n)_{n\geq 0}$ com espaço de estados $\{0,1\}$ e matriz de transição dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}.$$

Podemos representar:

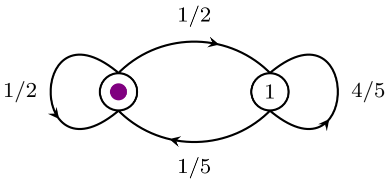


Representação gráfica de uma cadeia de Markov

Considere a CMTD $(X_n)_{n\geq 0}$ com espaço de estados $\{0,1\}$ e matriz de transição dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}.$$

Podemos representar:



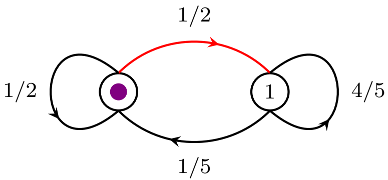
$X_0 = 0$

Representação gráfica de uma cadeia de Markov

Considere a CMTD $(X_n)_{n\geq 0}$ com espaço de estados $\{0, 1\}$ e matriz de transição dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}.$$

Podemos representar:



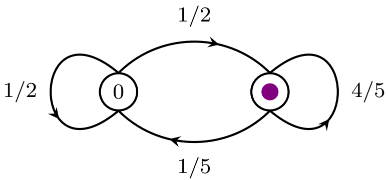
$$X_0 = 0$$

Representação gráfica de uma cadeia de Markov

Considere a CMTD $(X_n)_{n\geq 0}$ com espaço de estados $\{0,1\}$ e matriz de transição dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}.$$

Podemos representar:



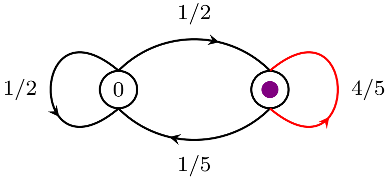
$$X_1 = 1$$

Representação gráfica de uma cadeia de Markov

Considere a CMTD $(X_n)_{n\geq 0}$ com espaço de estados $\{0,1\}$ e matriz de transição dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}.$$

Podemos representar:



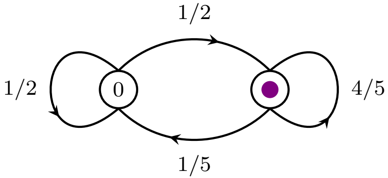
$$X_1 = 1$$

Representação gráfica de uma cadeia de Markov

Considere a CMTD $(X_n)_{n\geq 0}$ com espaço de estados $\{0,1\}$ e matriz de transição dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}.$$

Podemos representar:



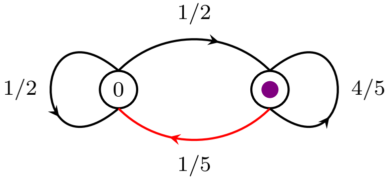
$$X_2 = 1$$

Representação gráfica de uma cadeia de Markov

Considere a CMTD $(X_n)_{n\geq 0}$ com espaço de estados $\{0,1\}$ e matriz de transição dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}.$$

Podemos representar:



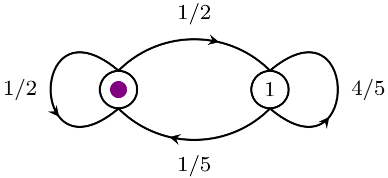
$$X_2 = 1$$

Representação gráfica de uma cadeia de Markov

Considere a CMTD $(X_n)_{n\geq 0}$ com espaço de estados $\{0,1\}$ e matriz de transição dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}.$$

Podemos representar:



$$X_3 = 0$$

Note que $P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0 | X_0 = 0) = p(0,1)p(1,1)p(1,0) = 2/25$.

Outra forma de definir uma cadeia de Markov

Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ um processo com valores no conjunto $\mathcal{S}$. Se existe uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d.

$$U_1, U_2, \ldots$$

com distribuição comum uniforme no intervalo $(0,1)$ e uma função

$$f : \mathcal{S} \times (0,1) \to \mathcal{S}$$

tal que

$$X_{n+1} = f(X_n, U_n),$$

para todo $n \geq 0$, dizemos que $(X_n)_{n\geq 0}$ é uma cadeia de Markov a tempo discreto.

Exemplo 1.1

Considere o passeio aleatório em $\mathbb{Z}$, $(Y_n)_{n\geq 0}$. *Se* $U_1, U_2, \ldots$ *são i.i.d. com* $U_1 \sim Uniforme(0,1)$ *então podemos escrever*

$$Y_{n+1} = f(Y_n, U_n),$$

onde a função $f : \mathbb{Z} \times (0,1) \to \mathbb{Z}$ *é dada por*

$$f(i,u) := \begin{cases} i+1, & si\ u < p, \\ i-1, & si\ u \geq p. \end{cases}$$

Probabilidades de transição em n passos

Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ uma CMTD com espaço de estados $\mathcal{S}$. Chama-se probabilidades de transição em n passos às probabilidades

$$p_n(i,j) := P(X_{m+n} = j | X_m = i),$$

para todo $m, n \geq 0$ e $i, j \in \mathcal{S}$. Neste caso

$$p_1(i,j) = p(i,j)$$

e por convenção supomos que

$$p_0(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Equações de Chapman-Kolmogorov

Proposição 1.1

Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ *uma CMTD com espaço de estados* $\mathcal{S}$*. Então,*

$$p_{n+r}(i,j) = \sum_{k\in\mathcal{S}} p_n(i,k)p_r(k,j),$$

para todo $n, r \geq 0$ *e* $i, j \in \mathcal{S}$*.*

Prova das Equações de Chapman-Kolmogorov. Por definição

$$p_{n+r}(i,j) = P(X_{n+r} = j | X_0 = i).$$

Por outro lado, $\{X_{n+r} = j\} = \bigcup_{k \in \mathcal{S}} (X_{n+r} = j, X_n = k)$ e então

$$p_{n+r}(i,j) = \sum_{k \in \mathbb{S}} P(X_{n+r} = j, X_n = k | X_0 = i).$$

Além disto

$$P(X_{n+r} = j, X_n = k | X_0 = i)$$

$$\shortparallel$$

$$P(X_{n+r} = j | X_n = k, X_0 = i) P(X_n = k | X_0 = i)$$

mas

$$P(X_{n+r} = j | X_n = k, X_0 = i) = P(X_{n+r} = j | X_n = k) = p_r(k,j) \text{ (Markov)}$$

$$\ldots \text{ e } P(X_n = k | X_0 = i) = p_n(i,k).$$

Recorrência e transiência

Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ uma CMTD com espaço de estados $\mathcal{S}$. Para $i \in \mathcal{S}$ seja

$$\tau_i := \inf\{n \geq 1 : X_n = i\},$$

com $\tau_i := \infty$ se o infimo não existe. Se

$$\mathbb{P}(\tau_i < \infty | X_0 = i) = 1$$

dizemos que i é um estado recorrente. Se i não é recorrente dizemos que é transiente; isto é, se

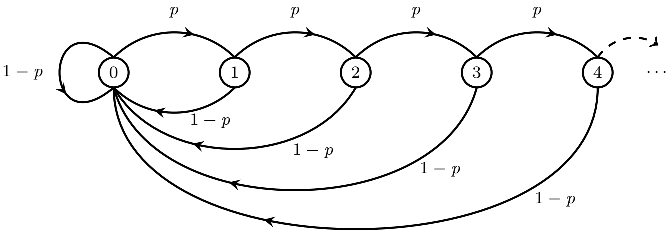
$$\mathbb{P}(\tau_i = \infty | X_0 = i) > 0$$

dizemos que i é transiente.

Castelo de cartas

Exemplo 1.2

Considere a CMTD dada por:



Dado que $X_0 = 0$, $\tau_0 \sim Geometrica(1-p)$. *Como* $p \in (0,1)$ *temos que*

$$P(\tau_0 < \infty | X_0 = 0) = 1.$$

Isto é, o estado 0 *é recorrente!*

Teorema 1.1

Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ *uma CMTD com espaço de estados* $\mathcal{S}$ *e probabilidades de transição* $p(i,j)$ *para* $i,j \in \mathcal{S}$. *Então*

$$i \in \mathcal{S} \text{ é recorrente se, e somente se, } \sum_{n=0}^{\infty} p_n(i,i) = \infty.$$

Prova do Teorema 1.1. Para cada $n \geq 1$ considere a variável indicadora

$$I_n := \begin{cases} 1, & \text{se } X_n = i, \\ 0, & \text{se } X_n \neq i, \end{cases}$$

e observe que $\sum_{n=0}^{\infty} I_n$ é o número de visitas do processo ao estado i.

$(\Rightarrow)$ Suponnha que i é recorrente. Então

$$P(\tau_i < \infty | X_0 = i) = 1 \quad \text{e} \quad E\left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n \middle| X_0 = i \right) = \infty.$$

Mas

$$E\left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n \middle| X_0 = i \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(I_n | X_0 = i\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P\left(X_n = i | X_0 = i\right) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(i,i).$$

Prova do Teorema 1.1. ($\Leftarrow$) Para provar a volta suponha que i é transiente. Neste caso

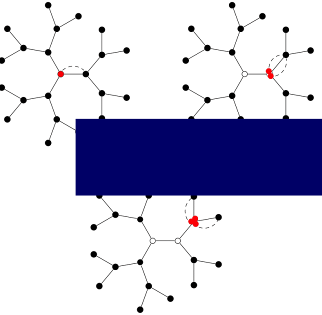
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n \Big| X_0 = i\right) \sim Geom(p_i)$$

onde $p_i := P(\tau_i = \infty | X_0 = i) > 0$ e portanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(i,i) = E\left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n \Big| X_0 = i\right) = \frac{1}{p_i} < \infty.$$

Referências

- R. Schinazi. Classical and Spatial Stochastic Processes, Birkhäuser Boston, 1999. Ver também: Uma introdução aos processos estocásticos espaciais, IMPA, 1995.
- Sheldon M. Ross. Introduction to Probability Models. 10th ed. Academic Press. 2010.
- B. Hayes. (2013) First links in the Markov chain. American Scientist **101**, pp. 92-97. Disponível em: `https://www.americanscientist.org/article/first-links-in-the-markov-chain`



Bom estudo!

Prof. Pablo M. Rodriguez
https://www.pablo-rodriguez.org
e-mail: pablo@de.ufpe.br