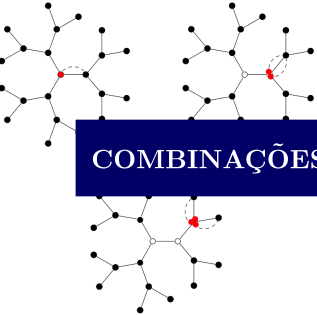
ET581 - Probabilidade 1

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE



COMBINAÇÕES SIMPLES - PERMUTAÇÕES CIRCULARES

Prof. Pablo M. Rodriguez

https://www.pablo-rodriguez.org/et581-probabilidade1

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN
Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo da Aula 4

- Combinações simples.
- Permutações circulares.

Motivação

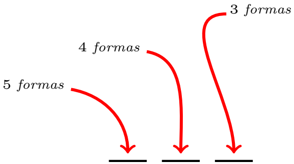
Estamos interessados em determinar o número de grupos diferentes de r objetos, ordenados ou não, que podem ser formados a partir de um total de n objetos. Para isso vamos estudar dois problemas similares:

- De quantas formas podemos selecionar r elementos em um conjunto com n elementos, e arrumá-los em fila?
- De quantas formas podemos selecionar r elementos em um conjunto com n elementos?

Exemplo 4.1

De quantas formas podemos selecionar 3 *elementos do conjunto* $\{a, b, c, d, e\}$ *e organizá-los em fila?*

Solução: *Esse é um problema típico de princípio multiplicativo, e para resolvê-lo basta observar que existem:*



Portanto, existem $5 \times 4 \times 3 = 60$ *maneiras de formar a fila desejada.*

Exemplo 4.2

De quantas formas podemos selecionar 3 *elementos do conjunto* $\{a, b, c, d, e\}$*?*

Solução: Este problema é similar ao anterior, no sentido que ainda precisamos selecionar 3 *elementos, com a diferença de que agora não precisamos organizá-los em fila.*

Já sabemos que existem $5 \times 4 \times 3 = 60$ *maneiras de formar uma fila com três elementos distintos do conjunto. Em outras palavras, há* 60 *maneiras de selecionar o grupo de* 3 *diferenciando pela ordem dos elementos.*

Enquanto no exemplo anterior a fila abc *é distinta da fila* cba*, no problema atual trata-se do mesmo subconjunto.*

Continuação do Exemplo 4.2. Note que nas 60 filas encontradas, cada grupo de 3 letras será contado $3! = 6$ vezes. Por exemplo, todas as permutações do subconjunto $\{a, b, c\}$ estão sendo contadas:

$$abc, \ acb, \ bac, \ bca, cab, \ cba.$$

Agora, como cada grupo de 6 elementos deve ser contado apenas 1 vez, o total de subconjuntos não ordenados é dado por

$$\frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10.$$

Em geral: subconjuntos ordenados

Quando queremos formar filas de r elementos selecionados dentre n elementos disponíveis, com $r \leq n$, temos um total de

$$n \times (n-1) \times \ldots \times (n-r+1)$$

formas de fazê-lo. É importante notar que na solução acima estamos multiplicando um total de r fatores, um para cada posição da fila, como esperado.

Reescrevendo, obtemos

$$n \times (n-1) \times \ldots \times (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!},$$

formas de selecionar subconjuntos ordenados de r elementos, dentre n disponíveis.

Em geral: subconjuntos

Como há $n \times (n-1) \times \ldots \times (n-r+1)$ formas diferentes de obter um subconjunto de r elementos, a partir de n elementos, quando a ordem da seleção é importante, e como cada subconjunto será contado $r!$ vezes quando a ordem não é relevante, temos que o número de subconjuntos de r elementos que podem ser formados a partir de um conjunto de n elementos é dado por:

$$\frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

Coeficientes Binomiais

Denotamos, para $r \leq n$:

$$\binom{n}{r} := \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

e observamos que, como $0! = 1$,

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Observação

Os valores $\binom{n}{r}$ recebem o nome de coeficientes binomiais. Em alguns livros são denotados por $C_{n,r}$.

Exemplo 4.3

De um grupo de 5 homens e 7 mulheres, quantos comitês diferentes formados por 3 homens e 4 mulheres podem ser formados? E se dois dos homens se recusarem a trabalhar juntos?

Solução: *Podemos fazer a seleção dos homens de*

$$\binom{5}{3} \quad \textit{formas distintas.}$$

Por outro lado, há

$$\binom{7}{4} \quad \textit{formas distintas}$$

de escolher as mulheres. Assim, pelo princípio multiplicativo, temos

$$\binom{5}{3} \times \binom{7}{4} = \frac{5!}{3!\,2!} \times \frac{7!}{4!\,3!} = 350$$

formas diferentes de escolher o comitê.

Continuação do Exemplo 4.3. Vamos agora responder a segunda pergunta do exemplo. Note que os grupos de 3 homens contendo aqueles (ambos) que se recusam a trabalhar juntos é dado por:

$$\binom{3}{1} = 3$$

enquanto que todos os grupos possíveis de três homens é dado por

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10.$$

Portanto, temos $10 - 3 = 7$ grupos de homens com a restrição requerida. Finalmente, o comitê pode ser formado de:

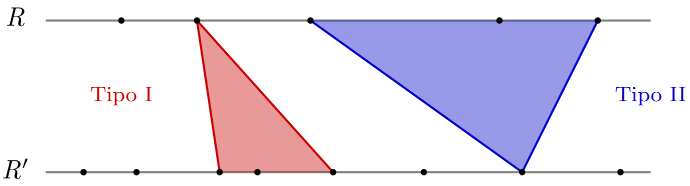
$$7 \times \binom{7}{4} = 7 \times \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{7 \times 7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 7 \times 7 \times 5 = 245$$

maneiras diferentes!

Exemplo 4.4

Marcamos 5 *pontos sobre uma reta* R *e* 8 *pontos sobre uma reta* R' *paralela a* R. *Quantos triângulos existem com vértices em três desses pontos?*

Solução. Para formar um triângulo ou tomamos um vértice em R e dois em R' ou tomamos um vértice em R' e dois em R.



Continuação do Exemplo 4.4. Para os triângulos do Tipo I há:

- $\binom{5}{1}$ formas de escolher o vértice em R e
- $\binom{8}{2}$ formas de escolher o vértice em R'.

Então, temos um total de

$$\binom{5}{1} \times \binom{8}{2}$$

triângulos. Analogamente, há

$$\binom{8}{1} \times \binom{5}{2}.$$

triângulos do Tipo II. Logo, pelo princípio aditivo, a quantidade de triângulos que obtemos desta forma é

$$\binom{5}{1} \times \binom{8}{2} + \binom{8}{1} \times \binom{5}{2} = 5 \times \left(\frac{8 \times 7}{2!}\right) + 8 \times \left(\frac{5 \times 4}{2!}\right) = 220.$$

Outra solução para o Exemplo 4.4. Para formar um triângulo devemos escolher três pontos que não estejam situados sobre a mesma reta, dentre os 13 pontos dados. O número de modos de escolher 3 dos 13 pontos é $\binom{13}{3}$. Desse total devemos retirar as $\binom{5}{3}$ escolhas de pontos em R e as $\binom{8}{3}$ escolhas possíveis de 3 pontos em R. Assim a resposta é

$$\binom{13}{3} - \binom{5}{3} - \binom{8}{3} = 286 - 10 - 56 = 220.$$

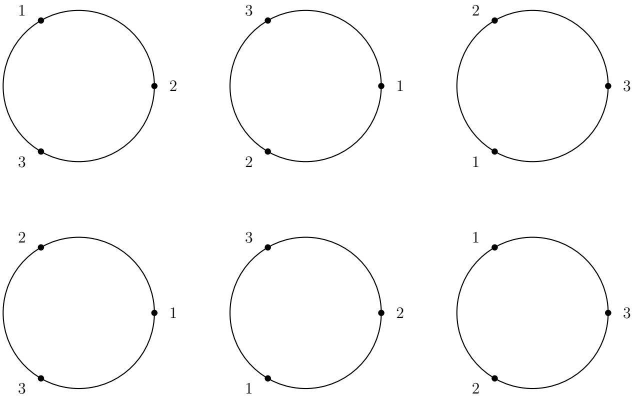
Motivação

Pergunta: De quantas formas podemos colocar n elementos distintos em n lugares equiespaçados em torno de um círculo, se consideramos equivalentes disposições que possam coincidir por rotação?

Há $3! = 6$ formas de colocar os elementos do conjunto $\{1, 2, 3\}$ em fila:

$$123, \quad 132, \quad 213, \quad 231, \quad 312, \quad 321$$

Mas, se formos colocar os elementos em torno de um círculo temos:



... apenas 2 formas!

Permutações circulares

Note que enquanto nas permutações simples importam os lugares que os elementos ocupam, nas permutações circulares o que importa é apenas a posição relativa dos elementos entre si.

Se não consideramos equivalentes disposições que coincidem por rotação temos $n!$ disposições. Mas, considerando a equivalência por rotação, cada permutação circular é gerada por n disposições. Logo,

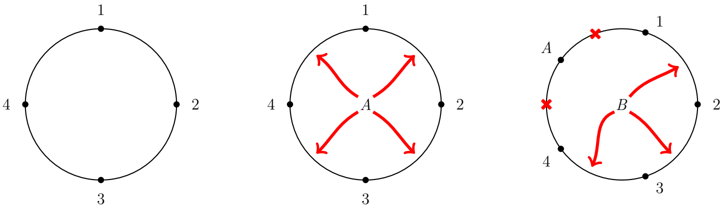
$$(PC)_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Notação para o # de permutações circulares de n elementos!

Exemplo 4.5

De quantas formas podem sentar-se 6 *pessoas em uma mesa redonda, de modo que duas determinadas dessas pessoas não fiquem juntas?*

Solução. Podemos sentar primeiro às 4 pessoas restantes, digamos as pessoas $1, 2, 3$ e 4. Isto pode ser feito de $(PC)_4 = 3!$ formas possíveis.



Se chamamos as outras duas pessoas de A e B, note que há 4 lugares para sentar A e, depois disso, há apenas 3 lugares disponíveis para B.

Portanto, a resposta ao problema é $3! \times 4 \times 3 = 72$.

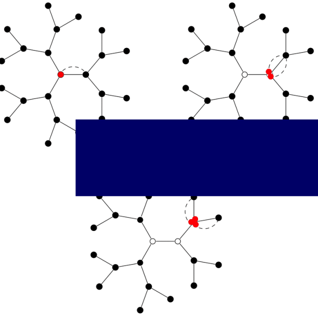
Referências e exercícios sugeridos!

- Morgado, Carvalho, Carvalho, Fernandez. Analise combinatoria e probabilidade. SBM, 1991.
- Ross, S. Probabilidade: Um curso moderno com aplicações, 8a ed., Bookman, 2010.

Exercícios:

- Capítulo 1 (Ross): 1.13, 1.15, 1.19, 1.20, 1.21, 1.22 (pág. 32 e 33).

Entregar os exercícios em vermelho na segunda-feira 21/06!



Bom estudo!