Aula 24: Convergência em distribuição

Disciplina: PGE950 - Probabilidade

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE

Prof. Pablo M. Rodriguez

http://www.pablo-rodriguez.org

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN
Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo desta aula

- Função característica.
- Convergência em distribuição.

Variáveis aleatórias complexas

Se X e Y são variáveis aleatórias em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, então

$$Z = X + i\,Y$$

chama-se variável aleatórias complexa.

Observação!

Por linearidade: $E(Z) = E(X) + iE(Y)$ *desde que* $E(X) < \infty$ *e* $E(Y) < \infty$.

Função característica

Se X é uma variável aleatória, sua função característica é a função

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C},$$

tal que $\varphi(t) = E\left(e^{itX}\right) = E(cos\{tX\}) + iE(sen\{tX\})$, para $t \in \mathbb{R}$

Observação!

Note que $E\left(e^{itX}\right) < \infty$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Propriedades

- $|\varphi(t)| \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

  Prova. Se $z = x + iy$ então $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Logo,

$$\begin{aligned} |\varphi(t)| &= |E(cos\{tX\}) + iE(sen\{tX\})| \\ &= \sqrt{E(cos\{tX\})^2 + E(sen\{tX\})^2} \\ &\leq \sqrt{E(cos^2\{tX\}) + E(sen^2\{tX\})} \quad \text{(Jensen)} \\ &= 1, \qquad \text{(pois } cos^2 x + sen^2 x = 1\text{)} \end{aligned}$$

- $\varphi(0) = 1$.

  Prova. $\varphi(0) = E\left(e^{i0X}\right) = E(1) = 1$.

- $\overline{\varphi(t)} = \varphi(-t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ (se $z = x + iy$ então $\overline{z} = x - iy$).

  Prova. Note que

  $$\varphi(-t) = E(cos\{-tX\}) + iE(sen\{-tX\}) = E(cos\{tX\}) - iE(sen\{tX\})$$

  pois $cos(-x) = cos(x)$ e $sen(-x) = -sen(x)$.

- Se X e Y são independentes, então $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$, $\forall t$.

  Prova.

  $$\begin{aligned}
  \varphi_{X+Y}(t) &= E\left(e^{it(X+Y)}\right) \\
  &= E\left(e^{itX+itY}\right) \\
  &= E\left(e^{itX}\right) E\left(e^{itY}\right) \\
  &= \varphi_X(t)\varphi_Y(t)
  \end{aligned}$$

  - Se $X_1, \ldots, X_n$ são independentes, então $\varphi_{X_1+\cdots+X_n} = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}$.

- φ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

  Prova. Devemos verificar que $\forall \epsilon > 0$, $\exists\, \delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| < \epsilon \quad \text{se} \quad |t - s| < \delta.$$

  De fato,

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \varphi(s)| &= \left|E\left(e^{itX} - e^{isX}\right)\right| \\ &\leq E\left(\left|e^{itX} - e^{isX}\right|\right) \\ &\leq E\left(\left|e^{i(t-s)X} - 1\right|\right) \end{aligned}$$

  Mas o Teorema da Convergência Dominada garante que

$$h(u) := E\left(\left|e^{iuX} - 1\right|\right) \to 0 \quad \text{quando} \quad u \to 0.$$

Mais propriedades

- $F_X = F_Y$ se, e somente se, $\varphi_X = \varphi_Y$.
- X tem distribuição simétrica em torno do 0 se, e somente se, $\varphi(t) \in \mathbb{R}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
- Se $Y = aX + b$ então $\varphi_Y(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$.
- Se $E(|X|^n) < \infty$ então φ tem n derivadas contínuas e
$$\varphi_X^{(k)}(t) = E\left(\{it\}^k e^{itX}\right), \quad k \in \{1, \ldots, n\}.$$
Como consequência,
$$\varphi_X^{(k)}(0) = i^k E(X^k).$$

Convergência em distribuição

Considere uma sequência de variáveis aleatórias $X, X_1, X_2, \ldots$ com funções de distribuição $F, F_1, F_2, \ldots$

Dizemos que X_n converge em distribuição para X se:

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = F(x),$$

para todo x ponto de continuidade de F.

Notação: $X_n \xrightarrow{D} X$ ou $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Exemplo 24.1

Seja $X_n = 1/n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e seja* $X = 0$. *Então,*

$$X_n \xrightarrow{q.c.} X \quad e \quad X_n \xrightarrow{P} X.$$

Por outro lado, note que

- *Se* $x > 0$ *então* $F_n(x) \to 1 = F(x)$, *quando* $n \to \infty$, *e*
- *se* $x < 0$ *então* $F_n(x) \to 0 = F(x)$, *quando* $n \to \infty$,

mas $F_n(0) \to 0 \neq 1 = F(0)$.

$X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{D} X$

Teorema 24.1

$X_n \xrightarrow{P} X$ *implica* $X_n \xrightarrow{D} X$

Prova. Suponha que $X_n \xrightarrow{P} X$, isto é, para todo $\epsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - X| > \epsilon\right) = 0.$$

Seja x um ponto de continuidade de F. Note que

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= P(X_n \leq x) \\
&= P(X_n \leq x, X \leq x+\epsilon) + P(X_n \leq x, X > x+\epsilon) \\
&\leq P(X \leq x+\epsilon) + P(X - X_n > \epsilon) \\
&\leq F(x+\epsilon) + P(|X_n - X| > \epsilon).
\end{aligned}$$

Isto é,

$$F_n(x) \leq F(x+\epsilon) + P(|X_n - X| > \epsilon). \tag{1}$$

... continuação da prova do Teorema 24.1. Agora, note que

$$\begin{aligned} F(x-\epsilon) &= P(X \leq x-\epsilon) \\ &= P(X \leq x-\epsilon, X_n \leq x) + P(X \leq x-\epsilon, X_n > x) \\ &\leq P(X_n \leq x) + P(X_n - X > \epsilon) \\ &\leq F_n(x) + P(|X_n - X| > \epsilon) \end{aligned}$$

Isto é,

$$F(x-\epsilon) - P(|X_n - X| > \epsilon) \leq F_n(x). \tag{2}$$

. . . continuação da prova do Teorema 24.1. De (1) e (2) temos que:

$$F(x-\epsilon) - P(|X_n - X| > \epsilon) \leq F_n(x) \leq F(x+\epsilon) + P(|X_n - X| > \epsilon),$$

que, fazendo $n \to \infty$, resulta em

$$F(x-\epsilon) \leq \lim_{n\to\infty} F_n(x) \leq F(x+\epsilon).$$

Agora, tomando $\epsilon \to 0$:

$$F(x) = \lim_{\epsilon\to 0} F(x-\epsilon) \leq \lim_{n\to\infty} F_n(x) \leq \lim_{\epsilon\to 0} F(x+\epsilon) = F(x),$$

onde usamos a continuidade de F em x. Portanto $X_n \xrightarrow{D} X$.

$X_n \xrightarrow{D} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$

Exemplo 24.2

Seja $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ *e defina* $X_n = (-1)^n X$ *para todo* $n \geq 1$. *Como*

$$X_n \sim \mathcal{N}(0,1), \text{ para todo } n \geq 1,$$

então $X_n \xrightarrow{D} X$. *Por outro lado,*

$$|X_n - X| = \begin{cases} 2X, & \text{se } n \text{ é ímpar}, \\ 0, & \text{se } n \text{ é par}. \end{cases}$$

Logo, se $\epsilon > 0$

$$P\left(|X_n - X| > \epsilon\right) = \begin{cases} 1 - \Phi(\epsilon/2), & \text{se } n \text{ é ímpar}, \\ 0, & \text{se } n \text{ é par}. \end{cases}$$

Então $X_n \overset{P}{\not\to} X$.

Proposição 24.1

Se $X_n \xrightarrow{D} c$, *com* c *uma constante, então* $X_n \xrightarrow{P} c$.

Prova. Seja $F_n(x) = P(X_n \leq x)$, $n \geq 1$ e note que, se $X = c$, então

$$F(x) := P(X \leq x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq c, \\ 0, & \text{se } x < c. \end{cases}$$

Suponha que $X_n \xrightarrow{D} X = c$. Isto é, para $x \neq c$,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x).$$

Agora, seja $\epsilon > 0$ e note que:

$$\begin{aligned} P(|X_n - c| > \epsilon) &= P(X_n > c + \epsilon) + P(X_n < c - \epsilon) \\ &\leq 1 - F_n(c + \epsilon) + F_n(c - \epsilon). \end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$ concluímos que $X_n \xrightarrow{P} c$.

Bom estudo!