Aula 9: Vetores aleatórios

Disciplina: PGE950 - Probabilidade

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE

Prof. Pablo M. Rodriguez

http://www.pablo-rodriguez.org

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo desta aula

- Vetores aleatórios
- Vetores aleatórios discretos
- Vetores aleatórios continuos.

Vetores aleatórios

Definição 9.1

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias definidas no mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Uma variável aleatória n-dimensional, ou vetor aleatório, é uma n-upla

$$\mathbf{X} := (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

onde, para cada $\omega \in \Omega$,

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n)(\omega) := (X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)).$$

Observação!

Se as variáveis aleatórias X_i, para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ forem

- *discretas, dizemos que* $\mathbf{X}$ *é um vetor aleatório discreto;*
- *(abs) continuas, dizemos que* $\mathbf{X}$ *é um vetor aleatório (abs) continuo.*

Vetores aleatórios: exemplos

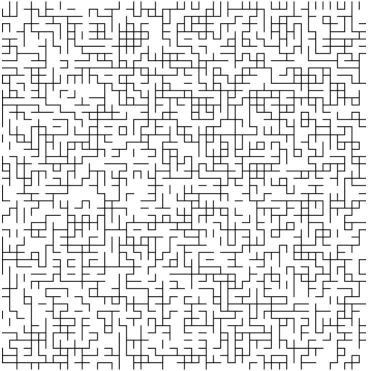
Exemplo 9.1

- *Características de uma pessoa: v.a.* (X, Y), *onde* $X =$ *altura, e* $Y =$ *peso, de uma pessoa de determinada população.*

- *Pesquisa de opinião: v.a.* $(X_1, X_2, \ldots, X_{100})$, *onde* $X_i = 1$ *se o* i*-ésimo indivíduo entrevistado é a favor de determinado assunto, ou* $X_i = 0$ *caso contrário.*

- *Propagação de uma infecção: v.a.* (S, I, R), *onde* S, I *e* R *denotam o # de indivíduos susceptíveis, infectados e recuperados de determinada doença em uma população.*

Vetores aleatórios: exemplos



Realização do modelo de percolação com p=0,51. Fonte: Wikipedia!

Vetores aleatórios bi-dimensionais

Para facilitar a exposição, vamos concentrar nossa atenção em definições e propriedades de vetores aleatórios bi-dimensionais.

Definição 9.2

Sejam X *e* Y *duas variáveis aleatórias. A função de distribuição do vetor aleatório* (X, Y)*, ou função de distribuição conjunta de* X *e* Y*, define-se como*

$$F(a, b) := P(X \leq a, Y \leq b),$$

para $a, b \in \mathbb{R}$*.*

Observação!

Note que $\{X \leq a, Y \leq b\} := \{X \leq a\} \cap \{Y \leq b\} \in \mathcal{F}$*. Logo* F *está bem definida.*

Proposição 9.1

$$F_X(a) = \lim_{b\to\infty} F(a,b) \qquad (\textit{distribuição marginal de } X),$$
$$F_Y(b) = \lim_{a\to\infty} F(a,b) \qquad (\textit{distribuição marginal de } Y).$$

Prova. Sabemos que $F_X(a) := P(X \le a)$, mas

$$\{X \le a\} = \{X \le a\} \cap \{Y < \infty\}.$$

Além disto, como

$$\{Y < \infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{Y \le n\}$$

temos que

$$P(X \le a) = P\left(X \le a, \bigcup_{n=1}^{\infty} \{Y \le n\}\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \le a, Y \le n\}\right).$$

... continuação da prova da Prop. 9.1. Agora, se definimos

$$A_n := \{X \leq a, Y \leq n\}$$

podemos verificar que $A_n \nearrow$. Isto é, para cada n, $A_n \subset A_{n+1}$. Então,

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

e portanto

$$F_X(a) = \lim_{n\to\infty} F(a,n).$$

Exemplo 9.2

Consideremos o experimento de jogar dois tetraedros regulares sobre uma superfície plana. Suponha que para cada um deles, os lados estão numerados de 1 *a* 4. *Seja*

$$X = \textit{face que está em contato com a superfície do } 1^{\circ} \textit{ tetraedro}$$

e

$$Y = \textit{maior das faces que estão em contato com a superfície.}$$

Vamos encontrar a função de distribuição conjunta de X *e* Y.

... continuação do Exemplo 9.2. Temos os seguintes possíveis resultados para (X, Y):

$$\begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) \\ (2,2) & (2,3) & (2,4) & \\ (3,3) & (3,4) & & \\ (4,4) & & & \end{array}$$

Vamos assumir que os 16 pontos do espaço amostral

$$\Omega = \{(i,j) : i,j = 1,2,3,4\}$$

são igualmente prováveis. Queremos encontrar os valores de $F(i,j)$ para todo (i,j). Por exemplo, para encontrar $F(2,3)$, note que

$$F(2,3) = P(X \leq 2, Y \leq 3) = \frac{6}{16}.$$

Exemplo 9.3

... continuação. En geral, $F(i,j)$ *é dado por*

	$i<1$	$1\leq i<2$	$2\leq i<3$	$3\leq i<4$	$4\leq i$
$j<1$	0	0	0	0	0
$1\leq j<2$	0	$1/16$	$1/16$	$1/16$	$1/16$
$2\leq j<3$	0	$2/16$	$4/16$	$4/16$	$4/16$
$3\leq j<4$	0	$3/16$	$6/16$	$9/16$	$9/16$
$4\leq j$	0	$4/16$	$8/16$	$12/16$	1

Proposição 9.2

Se $a_1 < a_2$ *e* $b_1 < b_2$ *então*

$$P(a_1 < X \leq a_2, b_1 < Y \leq b_2) = F(a_2, b_2) + F(a_1, b_1) - F(a_1, b_2) - F(a_2, b_1)$$

Prova. Exercício!

Vetores aleatórios discretos

Sejam X e Y v.a. discretas.

Definição 9.3

Chama-se função de probabilidade conjunta de X *e* Y *à função*

$$p(x, y) := P(X = x, Y = y).$$

Observação!

$$p_X(x) = P\left(\{X = x\} \cap \left\{\bigcup_y \{Y = y\}\right\}\right) = \sum_y P(X = x, Y = y) = \sum_y p(x, y).$$

Em geral:

Proposição 9.3

$$p_X(x) = \sum_y p(x,y) \qquad \textit{(função de probabilidade marginal de } X\textit{)},$$

$$p_Y(y) = \sum_x p(x,y) \qquad \textit{(função de probabilidade marginal de } Y\textit{)}.$$

No Exemplo 9.2 temos que X e Y são variáveis aleatórias discretas. A função de probabilidade conjunta de X e Y é dada por

(i,j)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(2,2)$
$p(i,j)$	$1/16$	$1/16$	$1/16$	$1/16$	$2/16$

(i,j)	$(2,3)$	$(2,4)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(4,4)$
$p(i,j)$	$1/16$	$1/16$	$3/16$	$1/16$	$4/16$

Vetores aleatórios continuos

Sejam X e Y variáveis aleatórias continuas.

Definição 9.4

Chamamos função densidade de probabilidade conjunta de X e Y à função não-negativa $f(x, y)$, definida para $x, y \in \mathbb{R}$, satisfazendo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1,$$

e tal que para todo $\mathcal{C} \in \mathcal{B}^2$ (σ-álgebra de Borel no $\mathbb{R}^2$) vale

$$P((X, Y) \in \mathcal{C}) = \iint_{\mathcal{C}} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Observação!

Se $\triangle x \approx 0$ *e* $\triangle y \approx 0$*:* $P\,(x < X \leq x + \triangle x, y < Y \leq y + \triangle y) \approx f(x,y)\,\triangle x\,\triangle y$.

Observação!

Como $F(a,b) = P(X \leq a,\, Y \leq b) = \int_{-\infty}^{b}\int_{-\infty}^{a} f(x,y)\,dx\,dy$, *temos que*

$$f(a,b) = \frac{\partial^2(F(a,b))}{\partial a\,\partial b}.$$

Podemos obter as densidades marginais de X e Y, a partir de $f(x, y)$.

Note que para todo $a < b$ temos que

$$P(a < X < b) = P(a < X < b, -\infty < Y < \infty) = \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy\, dx.$$

Agora, se definimos

$$f_X(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$$

temos que

$$P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)\, dx.$$

Em geral:

Proposição 9.4

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy \qquad (densidade\ marginal\ de\ X),$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx \qquad (densidade\ marginal\ de\ Y).$$

Exemplo 9.4

A densidade conjunta de X e Y é dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 2\, e^{-x}\, e^{-2y}, & 0 < x < \infty, 0 < y < \infty, \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcular:

- $P(X > 1, Y < 1)$;
- $P(X < Y)$.

... continuação do Exemplo 9.4. Note que

$$P(X > 1, Y < 1) = P((X, Y) \in \mathcal{C})$$

onde $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < \infty, 0 < y < 1\}$. Então,

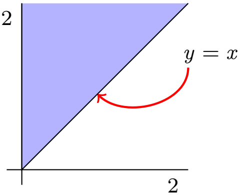
$$P(X > 1, Y < 1) = \iint\limits_{\mathcal{C}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_1^\infty 2\, e^{-x}\, e^{-2y}\, dx\, dy$$

e portanto

$$P(X > 1, Y < 1) = e^{-1}(1 - e^{-2}).$$

... continuação do Exemplo 9.4. Para calcular $P(X < Y)$ usamos

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y < \infty\}.$$



Então,

$$P(X < Y) = \iint_{\mathcal{C}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^\infty \int_0^y 2\, e^{-x}\, e^{-2y}\, dx\, dy = \frac{1}{3}.$$

(verificar!)

Bom estudo!