Lista de exercícios 1 - Cadeias de Markov a tempo discreto

PGE977 - Tópicos Especiais em Processos Estocásticos | 2° Semestre de 2020

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE

Prof. Pablo M. Rodriguez

---

1. Uma cadeia de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ com conjunto de estados $\{0,1,2\}$ tem matriz de transição de probabilidades
$$P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}$$
Determine as probabilidades $P(X_1 = 1, X_2 = 1|X_0 = 0)$ e $P(X_2 = 1, X_3 = 1|X_0 = 0)$.

2. Uma cadeia de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ com conjunto de estados $\{0,1,2\}$ tem matriz de transição de probabilidades
$$P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Determine as probabilidades $P(X_2 = 2, X_3 = 1|X_0 = 0)$ e $P(X_3 = 2|X_0 = 0)$.

3. Sejam A, B e C três eventos. Mostre que
$$P(A|C) = P(A|B \cap C)P(B|C) + P(A|B^c \cap C)P(B^c|C).$$

4. Os físicos Paul e Tatyana Ehrenfest consideram um modelo conceitual para o movimento de moléculas no qual M moléculas estavam distribuídas entre 2 urnas. Em cada instante de tempo uma das moléculas era escolhida aleatóriamente, removida de sua urna e colocada na outra. Se X_n representa o número de moléculas na primeira urna imediatamente após a n-ésima mudança então $(X_n)_{n\geq 0}$ é uma cadeia de Markov. Escreva as probabilidades de transição desta cadeia. Justifique.

5. Suponha que i e j são da mesma classe recorrente. Mostre que
$$P(T_i < \infty|X_0 = j) = 1.$$

6. Considere os Exemplos 1 (Passeio aleatório em $\mathbb{Z}$), 2 (Passeio aleatório no círculo) e 3 (Processo de ramificação). Qual destas cadeias é irredutível? Note que a resposta pode depender dos parâmetros p (passeio aleatório) ou p_i (ramificação).

7. Suponha que em um grupo de 6 pessoas está subdividido em ignorantes (pessoas que não sabem da informação) e informantes (pessoas que sabem da informação). Suponha que em cada instante de tempo ocorre uma interação entre um par destas pessoas, e que cada par tem a mesma probabilidade de interagir. Se uma das pessoas do par é um informante e a outra é um ignorante, o informante conta a informação com probabilidade p e neste caso o ignorante vira informante. Em qualquer outra situação nada acontece. Seja X_n o número de informantes no grupo no n-ésimo instante de tempo. Determine a matriz de probabilidades de transição da cadeia $(X_n)_{n\geq 0}$.

8. Considere as seguintes cadeias de Markov:
   (a) O passeio aleatório em $\mathbb{Z}$;
   (b) o passeio aleatório no círculo (5 estados);
   (c) as cadeias consideradas nos exercícios 2 a 4.

   Encontre uma função $f(x,u)$ tal que para todo $n \geq 1$ podemos escrever $X_n = f(X_{n-1}, U_n)$ onde $\{U_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência i.i.d. com $U_i \sim U(0,1)$.

9. Considere a cadeia de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ com conjunto de estados $\{0,1,2,3,4,5\}$ e matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 1/6 & 5/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Encontre todas as classes e determine quais são transientes e quais são recorrentes.

10. Considere a cadeia de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ com conjunto de estados $\{0,1,2,3,4,5\}$ e matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Encontre todas as classes e determine quais são transientes e quais são recorrentes.

11. Considere uma cadeia de Markov em $\{0,1,2,\ldots\}$ para a qual 0 é uma armadilha, isto é, $p(0,0) = 1$. Suponha que $\{1,2,\ldots\}$ é outra classe e que $p(i,0) > 0$ para algum $i \geq 1$.
    (a) O que pode dizer sobre a recorrência de cada classe?
    (b) Você pode supor algo com relação da possível evolução desta cadeia?

12. De um exemplo de uma classe infinita e fechada, que seja transiente.

13. Considere a cadeia de Markov com conjunto de estados $\{0,1,2,3\}$ e matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 2/5 & 3/10 & 1/5 & 1/10 \\ 0 & 7/10 & 1/5 & 1/10 \\ 0 & 0 & 9/10 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Encontre o tempo médio para o processo alcançar o estado 3 dado que começa no estado 0.

14. Considere a cadeia de Markov com conjunto de estados $\{0,1,2\}$ e matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 3/5 & 3/10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

    (a) Determine a probabilidade da cadeia terminar no estado 0 dado que começou no estado 1.
    (b) Suponha que $P(X_0 = i) = 1/3$, i=0,1,2. Determine o tempo médio de absorção do processo.

15. Considere o problema de difusão de uma informação do Exercício 7. Suponha agora que o grupo é de 5 pessoas e que no tempo 0 somente um deles é um informante. Calcule o tempo médio até que todos sabem da informação.

16. Uma urna contem 5 bolas vermelhas e 3 bolas verdes. As bolas são escolhidas ao acaso, uma por uma, da urna. Se a bola escolhida for vermelha então ela é retirada da urna. As bolas verdes escolhidas são devolvidas à urna. O processo de seleção continua até que todas as bolas vermelhas são removidas da urna. Qual é o tempo médio de duração do jogo?

17. Mostre que se $p_i > 0$ para cada $i \geq 0$, e $q_i > 0$ para cada $i \geq 1$, então a cadeia de nascimento e morte correspondente é irredutível.

18. Considere o PA em $\mathbb{Z}^+$ tal que

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = 1 | Y_n = 0) = p_0 = 1 - \mathbb{P}(Y_{n+1} = 0 | Y_n = 0)$$

e

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = i+1 | Y_n = i) = p_i = 1 - \mathbb{P}(Y_{n+1} = i-1 | Y_n = i),$$

para todo $n \geq 0$ e para todo $i \geq 1$. Discuta sobre a recorrência e transiência deste PA nos seguintes casos:
    (a) existe $\ell := \lim_{i\to\infty} p_i$ e $\ell > 1/2$;
    (b) existe $\ell := \lim_{i\to\infty} p_i$ e $\ell < 1/2$.