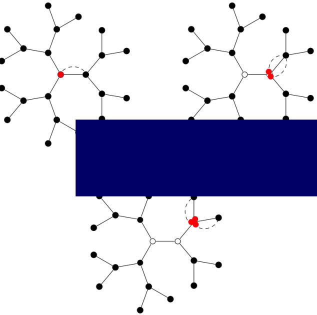
ET581 - Probabilidade 1

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE



DISTRIBUIÇÕES CLÁSSICAS

Prof. Pablo M. Rodriguez
https://www.pablo-rodriguez.org/et581-probabilidade1

Universidade Federal de Pernambuco
CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo da Aula 20

- Distribuições clássicas.

Distribuição Bernoulli

X tem *distribuição de Bernoulli* com parâmetro $p \in (0,1)$ se:

$$p(1) = p \quad \text{e} \quad p(0) = 1 - p.$$

Notação: $X \sim Bernoulli(p)$.

Observação!

Um experimento com apenas dois resultados possíveis, sucesso ou fracasso, chama-se ensaio de Bernoulli.

Exemplo 20.1

Seja X a variável aleatória indicadora do evento A com $P(A) = p$:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se } A \text{ ocorre,} \\ 0, & \text{se } A \text{ não ocorre.} \end{cases}$$

Então $X \sim Bernoulli(p)$.

Exemplo 20.2

Considere o lançamento de um dado honesto e seja X a variável aleatória indicadora da ocorrência de um valor menor ou igual do que 4. *Então, como*

$$P(X = 1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad e \quad P(X = 0) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

temos que

$$X \sim Bernoulli\left(\frac{2}{3}\right).$$

Esperança e variância de uma Bernoulli

Se $X \sim Bernoulli(p)$ então $E(X) = p$ e $Var(X) = p(1-p)$.

De fato, lembre que

$$E(X) = P(X = 1) = p$$

e como $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$ e

$$E(X^2) = P(X = 1) = p,$$

temos que:

$$Var(X) = p - p^2 = p(1-p).$$

Distribuição Binomial

X tem *distribuição Binomial* com parâmetros $n \in \mathbb{N}$ e $p \in (0,1)$ se:

$$p(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \text{ para } i \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Notação: $X \sim B(n, p)$.

Observação!

X pode ser interpretada como o número de sucessos obtidos quando n ensaios independentes de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p, são realizados.

Note que, para $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, por exemplo a configuração

σ :	✔	✖	✔	✖	✔	$\cdots\cdots$	✖	✔	✖	✔
	1	2	3	4	5		$n-3$	$n-2$	$n-1$	n

i sucessos (✔)
$n - i$ fracassos (✖)

é favorável para a ocorrência de $\{X = i\}$. Como temos $\binom{n}{i}$ formas diferentes de obter uma configuração destas e como

$$P(\sigma) = p^i(1-p)^{n-i},$$ por independência!

Note que, para $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, por exemplo a configuração

$$\sigma : \begin{array}{cccccccccc} ✔ & ✖ & ✔ & ✖ & ✔ & & ✖ & ✔ & ✖ & ✔ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \cdots\cdots & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & n-3 & n-2 & n-1 & n \end{array}$$

i sucessos (✔)

$n - i$ fracassos (✖)

é favorável para a ocorrência de $\{X = i\}$. Como temos $\binom{n}{i}$ formas diferentes de obter uma configuração destas e como

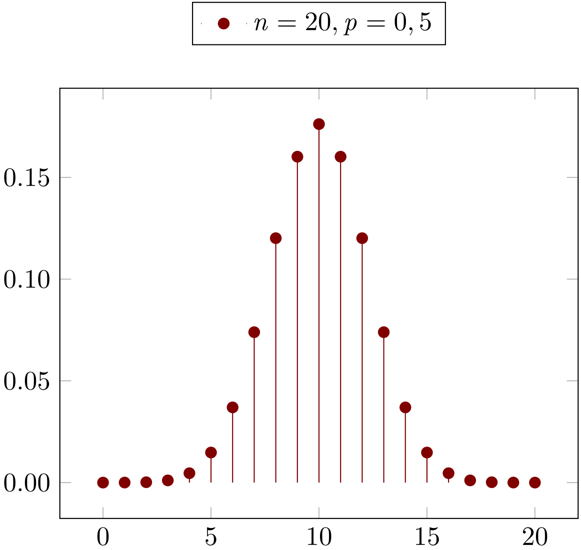
$$P(\sigma) = p^i (1-p)^{n-i},$$

por independência!

concluímos que

$$P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}.$$

$p(i)$



Se $X \sim B(n, p)$ podemos escrever

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

em que $X_1, \ldots, X_n$ são i.i.d. com $X_1 \sim Bernoulli(p)$.

Observação!

A notação i.i.d. é usada para dizer que as variáveis são independentes e identicamente distribuídas.

No Exemplo 20.2, suponha que o dado e lançado 10 vezes e que os resultados de lançamentos distintos são independentes. Calcule:

a. A probabilidade de que em pelo menos duas oportunidades resulte um valor menor ou igual do que 4.

b. A probabilidade de que sempre resulte um valor maior do que 4.

Solução. Seja Y o número de lançamentos, dos 10, nos quais resulta um valor menor ou igual do que 4. Então,

$$Y \sim B\left(10, \frac{2}{3}\right).$$

Então:

a.

$$P(Y=0)=\binom{10}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{0}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}=\frac{1}{3^{10}}.$$

b.

$$\begin{aligned}
P(Y\geq 2) &= 1-P(Y<2)\\
&= 1-P(Y=0)-P(Y=1)\\
&= 1-\binom{10}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{0}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}-\binom{10}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^{1}\left(\frac{1}{3}\right)^{9}\\
&= 1-\frac{1}{3^{10}}-\frac{20}{3^{10}}\\
&= 1-\frac{19}{3^{10}}.
\end{aligned}$$

Problema

Um avião tem um voo bem sucedido se a maioria dos seus motores funciona durante o voo. Suponha que o motor de um avião funciona durante um voo, independentemente aos outros motores, com probabilidade p, com $p \in (0, 1)$. Para que valores de p um avião de 5 motores é preferível a um avião de 3 motores?

Solução. Considere os eventos:

$$A_i = \{\text{o avião de } i \text{ motores tem um voo bem sucedido}\}, \quad \text{para } i \in \{3, 5\}.$$

e as variáveis aleatórias:

$$X_i = \# \text{ de motores que funciona no avião de } i \text{ motores}, \quad \text{para } i \in \{3, 5\}.$$

Queremos encontrar os valores de p para os quais:

$$P(A_5) > P(A_3), \text{ que é equivalente a: } P(X_5 \geq 3) > P(X_3 \geq 2).$$

Veja o Problema 5 da Aula 14!

Esperança e variância de uma Binomial

Se $X \sim B(n,p)$ então $E(X) = np$ e $Var(X) = np(1-p)$.

Como

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} n\binom{n-1}{i-1}p^i(1-p)^{n-i} && \text{usando } i\binom{n}{i} = n\binom{n-1}{i-1} \\
&= p\sum_{j=0}^{n-1} n\binom{n-1}{j}p^j(1-p)^{n-1-j} && \text{fazendo } j = i-1 \\
&= np
\end{aligned}$$

... sendo a última pois $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}p^j(1-p)^{n-1-j} = 1.$

Exercício: Calcule $E(X^2)$ (ver Ross, pág. 175) e depois $Var(X)$.

Distribuição de Poisson

X tem *distribuição de Poisson* com parâmetro $\lambda \in (0, \infty)$ se:

$$p(i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}, \text{ para } i \in \{0, 1, \ldots\}.$$

Notação: $X \sim Poisson(\lambda)$.

Observação!

X pode ser interpretada como uma aproximação para o número de sucessos obtidos quando n ensaios independentes de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p, são realizados, assumindo valores grandes de n e pequenos de p.

Aproximação da Binomial para a Poisson

Seja $X \sim B(n, p)$, n grande, e seja $Y \sim Poisson(\lambda)$ com $\lambda = np$.

$$P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \frac{n!}{(n-i)!i!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^i \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-i}$$

que podemos reescrever:

$$P(X = i) = \left\{ \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-\{i-1\})}{n^i} \right\} \left(\frac{\lambda^i}{i!}\right) \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^i}.$$

Aproximação da Binomial para a Poisson

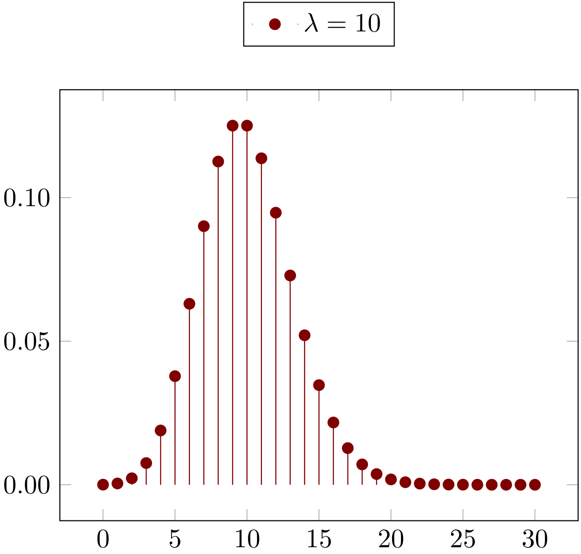
Como

$$1 - \frac{j}{n} \approx 1, \;\; \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \approx e^{-\lambda}, \;\; \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^i \approx 1,$$

concluimos que

$$P(X = i) \approx \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} = P(Y = i).$$

$p(i)$



Esperança e variância de uma Poisson

Se $X \sim Poisson(\lambda)$ então $E(X) = \lambda$ e $Var(X) = \lambda$. Note que:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{ie^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \qquad \text{fazendo } j = i - 1 \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

... sendo a última pois $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = 1$.

Exercício: Verifique que $E(X^2) = \lambda(\lambda + 1)$ (Ross, pág. 184).

Distribuição Geométrica

X tem *distribuição geométrica* com parâmetro $p \in (0,1)$ se:

$$p(i) = p(1-p)^{i-1}, \text{ para } i \in \mathbb{N}.$$

Notação: $X \sim Geom(p)$.

Observação!

X pode ser interpretada como o número de ensaios independentes de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p, que devem ser realizados até obter o primeiro sucesso.

Pensando na interpretação de X, note que se

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se o } i\text{-ésimo ensaio resulta em sucesso,} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para todo $i \in \mathbb{N}$, então:

$$P(X = i) = P\left(\left\{\bigcap_{k=1}^{i-1}\{X_k = 0\}\right\} \cap \{X_i = 1\}\right) = (1-p)^{i-1}p.$$

Pensando na interpretação de X, note que se

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se o } i\text{-ésimo ensaio resulta em sucesso,} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para todo $i \in \mathbb{N}$, então:

$$P(X = i) = P\left(\left\{\bigcap_{k=1}^{i-1}\{X_k = 0\}\right\} \cap \{X_i = 1\}\right) = (1-p)^{i-1}p.$$

Pensando na interpretação de X, note que se

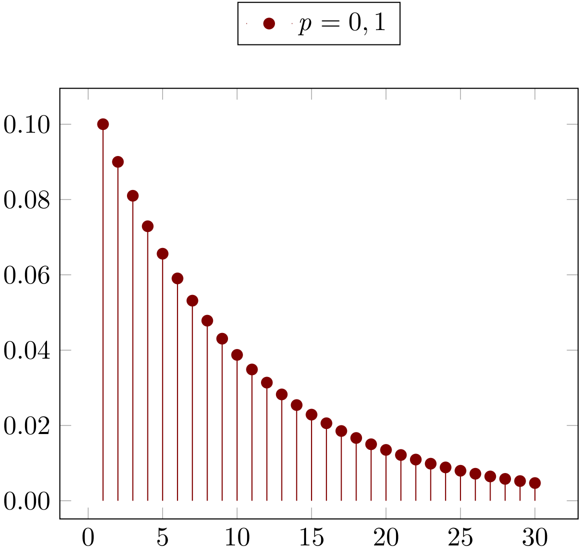
$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se o } i\text{-ésimo ensaio resulta em sucesso,} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para todo $i \in \mathbb{N}$, então:

$$P(X = i) = P\left(\left\{\bigcap_{k=1}^{i-1} \{X_k = 0\}\right\} \cap \{X_i = 1\}\right) = (1-p)^{i-1} p.$$

por independência!

$p(i)$



Esperança e variância de uma Geométrica

Se $X \sim Geometrica(p)$ então $E(X) = 1/p$ e $Var(X) = (1-p)/p^2$.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=1}^{\infty} i(1-p)^{i-1}p \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}(i-1+1)(1-p)^{i-1}p \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}(i-1)(1-p)^{i-1}p + \sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^{i-1}p \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} j(1-p)^{j}p + 1 \\
&= (1-p)\sum_{j=1}^{\infty} j(1-p)^{j-1}p + 1 \\
&= (1-p)E(X) + 1
\end{aligned}$$

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Então $E(X) = (1-p)E(X) + 1$. Isto é $E(X) = 1/p$.

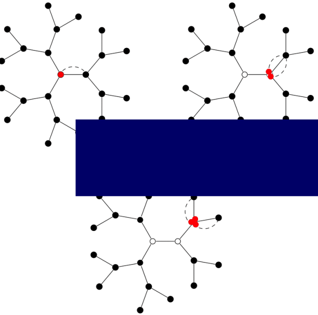
Referência!

Ross, S. Probabilidade: Um curso moderno com aplicações, 8a ed., Bookman, 2010.

Exercícios:

- Capítulo 4 (Ross): 4.33, 4.38, 4.40, 4.49, 4.51, 4.52, 4.58 (pág. 219 a 221).

Entregar a resolução dos exercícios em vermelho na segunda-feira 23/08!



Bom estudo!