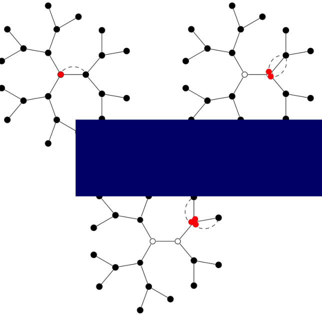
Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE



DISTRIBUIÇÃO ESTACIONÁRIA

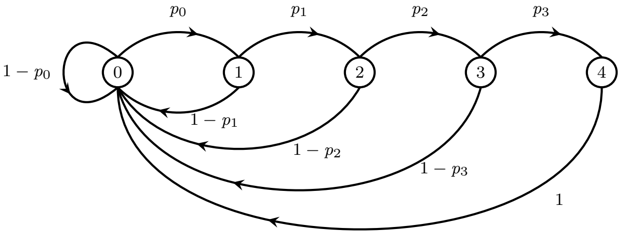
Prof. Pablo M. Rodriguez
https://www.pablo-rodriguez.org

Universidade Federal de Pernambuco
CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

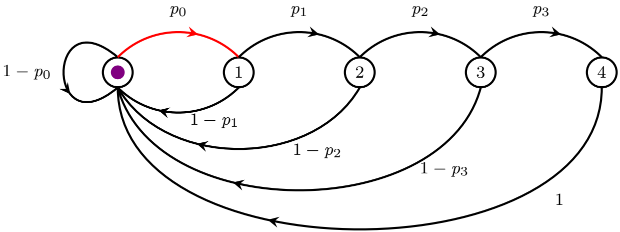
Conteúdo

- Distribuição estacionária.

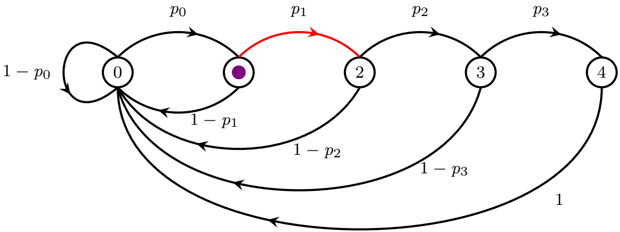
Motivação



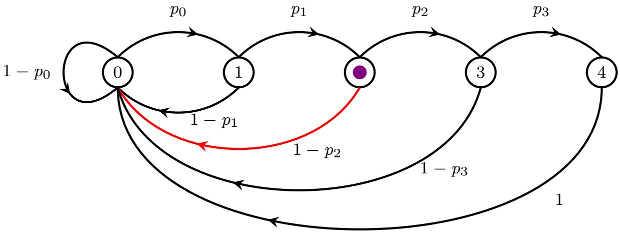
Motivação



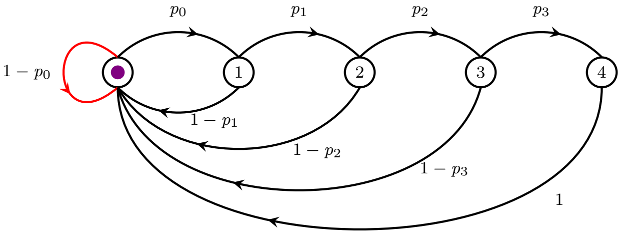
Motivação



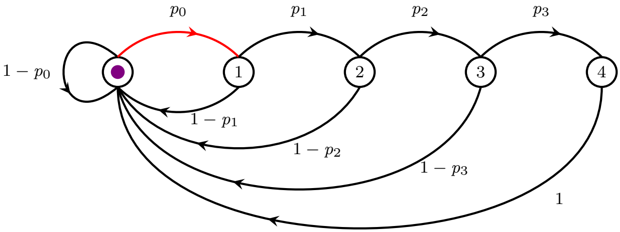
Motivação



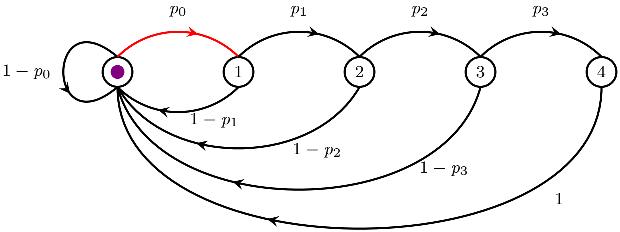
Motivação



Motivação

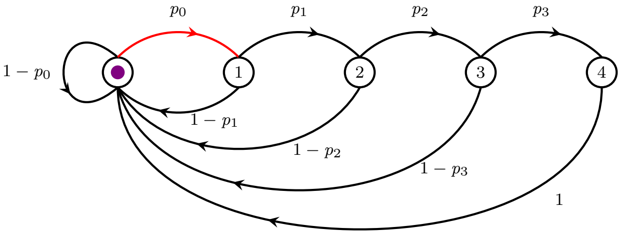


Motivação



Pergunta:

Motivação



Pergunta: qual é a probabilidade de que a partícula esteja em 0,

$\ldots$ *após* $n \gg 1$ *passos?*

Distribuição estacionária

Questão: Dada uma C.M.T.D. $(X_n)_{n\geq 0}$ iremos procurar condições sob as quais a cadeia tem um "equilíbrio" em termos de distribuição!

Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ uma C.M.TD. com espaço de estados $\mathcal{S}$ e probabilidades de transição $p(i,j)$, $i,j \in \mathcal{S}$. Uma distribuição de probabilidades $\pi = (\pi(i))_{i\in\mathcal{S}}$ é uma distribuição estacionária para a cadeia se

$$\sum_{i\in\mathcal{S}} \pi(i)p(i,j) = \pi(j), \quad \text{para todo } j \in \mathcal{S}.$$

Observação

Note que $\sum_{i\in\mathcal{S}} \pi(i) = 1.$

Se π é distribuição estacionária e $X_0 \sim \pi$; i.e.

$$P(X_0 = i) = \pi(i), \text{ para todo } i \in \mathcal{S},$$

então $X_n \sim \pi$ para todo $n \geq 1$. De fato, para $j \in \mathcal{S}$ vale que

$$\begin{aligned} P(X_1 = j) &= \sum_{i \in \mathcal{S}} P(X_1 = j | X_0 = i) P(X_0 = i), \\ &= \sum_{i \in \mathcal{S}} p(i,j)\pi(i), \\ &= \pi(j). \end{aligned}$$

Assim $X_1 \sim \pi$. Analogamente, e por indução, podemos verificar que $X_n \sim \pi$, para todo $n \geq 1$.

Exemplo 1

Considere a CMTD $(X_n)_{n\geq 0}$ *com espaço de estados* $\{0,1\}$ *e matriz de transição dada por*

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}.$$

Se π *é distribuição estacionária para esta cadeia então satisfaz:*

$$\begin{cases} \pi(0) = (1/2)\pi(0) + (1/5)\pi(1), \\ \pi(1) = (1/2)\pi(0) + (4/5)\pi(1), \end{cases}$$

junto com $\pi(0)+\pi(1)=1$. *Neste caso,* $\pi = (\pi(0),\pi(1)) = (2/7,5/7)$.

Exemplo 2

Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ *uma C.M.T.D. com* $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Exemplo 2

Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ *uma C.M.T.D. com* $\mathcal{S} = \{0,1,2,3,4\}$ *e*

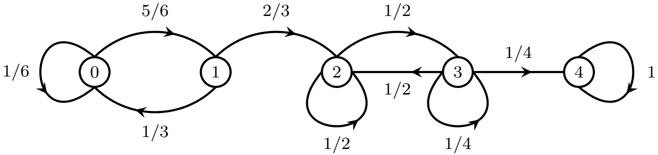
$$P = \begin{bmatrix} 1/6 & 5/6 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se π *é distribuição estacionária para esta cadeia, então* π *satisfaz:*

$$\begin{cases} \pi(0) & = & (1/6)\pi(0) + (1/3)\pi(1), \\ \pi(1) & = & (5/6)\pi(0), \\ \pi(2) & = & (2/3)\pi(1) + (1/2)\pi(2) + (1/2)\pi(3), \\ \pi(3) & = & (1/2)\pi(2) + (1/4)\pi(3), \\ \pi(4) & = & (1/4)\pi(3) + \pi(4). \end{cases}$$

$\ldots$ *junto com* $\pi(0) + \pi(1) = 1.$

... continuação do Exemplo 2. Neste caso $\pi = (0, 0, 0, 0, 1)$. Note que:



Existem três clases:

- $\mathcal{C}_1 = \{0, 1\}$ (transiente),
- $\mathcal{C}_2 = \{2, 3\}$ (transiente) e
- $\mathcal{C}_3 = \{4\}$ (recorrente).

Unicidade

Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ uma C.M.T.D. irredutível e recorrente. Se π_1 e π_2 são distribuições estacionárias para a cadeia então $\pi_1(i) = \pi_2(i)$, para todo $i \in \mathcal{S}$.

Proposição 1

Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ uma C.M.T.D e π uma distribuição estacionária para a cadeia. Se $i \in \mathcal{S}$ é tal que $\pi(i) > 0$, então i é recorrente.

Demonstração.

Se π é estacionária então, por indução em n, temos que:

$$\sum_{j\in\mathcal{S}} \pi(j) p_n(j,i) = \pi(i), \text{ para todo } n > 1.$$

Somando em n e reorganizando termos temos que:

$$\sum_{j\in\mathcal{S}} \pi(j) \sum_{n=1}^{\infty} p_n(j,i) = \infty. \tag{1}$$

Se $I(i)$ é o número de visitas ao estado i, temos que

$$E(I(i)|X_0 = j) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(j,i) = \frac{\beta_{ji}}{1-\beta_{ii}}, \tag{2}$$

onde $\beta_{ji} := P(T_i < \infty | X_0 = j)$. De (1) e (2) concluímos: $\beta_{ii} = 1$. $\square$

Recorrência e existência da distribuição estacionária

Exemplo 3

Considere o passeio aleatório simétrico em $\mathbb{Z}$, que sabemos é irredutível e recorrente. Suponha que π é distribuição estacionária para esta cadeia. Então,

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \pi(i)p(i,j) = \pi(j), \quad \text{para todo } j \in \mathbb{Z}.$$

Isto é, para todo $j \in \mathbb{Z}$ vale que

$$\pi(j) = (1/2)\pi(j-1) + (1/2)\pi(j+1),$$

que podemos reescrever como:

$$\pi(j) - \pi(j-1) = \pi(j+1) - \pi(j).$$

... continuação do Exemplo 3. Em particular, para todo $j > 0$:

$$\pi(j) = \pi(j-1) + (\pi(1) - \pi(0)) = \pi(0) + j\,(\pi(1) - \pi(0))\,.$$

Como $\pi(j) \in [0,1]$ então $\pi(1) - \pi(0) = 0$ e $\pi(j) = \pi(0)$, $\forall j \geq 1$. Mas

$$1 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \pi(j) \geq \sum_{j \in \mathbb{Z}^+} \pi(j) = \infty,$$

o que é uma contradição! Portanto, não existe distribuição estacionária para o p.a.s. em $\mathbb{Z}$.

Recorrência positiva

Seja

$$T_i := \inf\{n \geq 1 : X_0 = i\}.$$

Dizemos que um estado $i \in \mathcal{S}$ é recorrente positivo se

$$E(T_i | X_0 = i) < \infty.$$

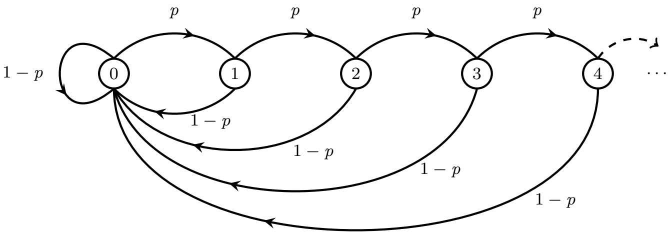
Por outro lado, a um estado recorrente tal que

$$E(T_i | X_0 = i) = \infty,$$

o chamamos recorrente nulo.

Exemplo 4

Considere a CMTD:



e note que, dado que $X_0 = 0$, *vale que* $T_0 \sim Geom(1-p)$. *Portanto,*

$$E(T_0|X_0 = 0) = \frac{1}{1-p} < \infty$$

e o estado 0 *é recorrente positivo.*

Teorema 1

Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ *uma C.M.T.D irredutível. A cadeia tem uma distribuição estacionária se, e somente se, todos os estados são recorrentes positivos. Além disto, se a distribuição estacionária existe, então ela é única e é dada por*

$$\pi(i) = \frac{1}{E(T_i|X_0 = i)},$$

para todo $i \in \mathcal{S}$.

Corolário 1

Se um estado é recorrente positivo, então todos os estados que estão na mesma classe são recorrentes positivos.

Convergência para uma distribuição estacionária

Sabemos que se uma C.M. é irredutível e recorrente positiva então ela tem uma única distribuição estacionária π.

Questão: Quando podemos garantir que

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j | X_0 = i) = \pi(j), \text{ para todo } j \in \mathcal{S}?$$

Período

Considere uma cadeia de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$, com $\mathcal{S}$ e $p(i,j)$. Seja j um estado recorrente e seja:

$$I_j := \{n \geq 1 : p_n(j,j) > 0\}.$$

Denotamos por d_j o máximo comum divisor de I_j e dizemos que d_j é o período de j.

Proposição 2

Todos os estados de uma mesma classe recorrente têm o mesmo período.

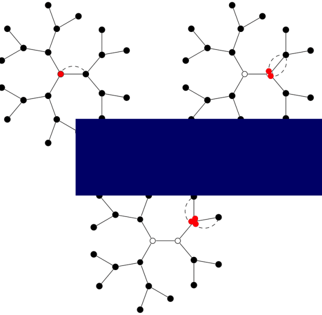
Observação

Dizemos que uma classe de período 1 é aperiódica.

Teorema 2

Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ *uma C.M.T.D irredutível, aperiódica e recorrente. Suponha que a cadeia tem uma distribuição estacionária* π. *Então, para todo* $i, j \in \mathcal{S}$ *temos que*

$$\lim_{n\to\infty} p_n(i,j) = \pi(j).$$



Bom estudo!

Prof. Pablo M. Rodriguez
https://www.pablo-rodriguez.org
e-mail: pablo@de.ufpe.br