Aula 22: Teoremas limite

Disciplina: PGE950 - Probabilidade

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE

Prof. Pablo M. Rodriguez

http://www.pablo-rodriguez.org

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN
Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo desta aula

- Convergência em Probabilidade e quase-certa.
- Lei dos Grandes Números.
- Sequências de eventos.
- Lema de Borel-Cantelli.

Convergência em probabilidade: $X_n \xrightarrow{P} X$

Considere uma sequência de variáveis aleatórias $X, X_1, X_2, \ldots$

Dizemos que X_n converge para X em probabilidade se:

$$\text{Para todo } \epsilon > 0, \text{ vale que } \lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - X| \geq \epsilon\right) = 0.$$

Notação: $X_n \xrightarrow{P} X$.

Observação!

$X_n \xrightarrow{P} X$ se $\forall \epsilon > 0$ temos $P\left(|X_n - X| < \epsilon\right) \approx 1$ para n suficientemente grande.

Convergência quase certa: $X_n \overset{q.c.}{\to} X$

Considere uma sequência de variáveis aleatórias $X, X_1, X_2, \ldots$

Dizemos que X_n converge para X quase certamente se:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1.$$

Notação: $X_n \overset{q.c.}{\to} X$.

Observação!

$X_n \overset{q.c.}{\to} X$ *se* $P(A) = 1$, *onde* $A := \left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}$.

Lembrete!

Se $X, X_1, X_2, \ldots$ *são variáveis aleatórias tais que* $X_n \overset{q.c.}{\to} X$ *então* $X_n \overset{P}{\to} X$.

$X_n \xrightarrow{P} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{q.c.} X$

Exemplo 22.1

Seja $U \sim U(0,1)$*, defina os intervalos*

$$I_1 = (0,1), I_2 = (0,1/2], I_3 = (1/2,1), I_4 = (0,1/4], I_5 = (1/4,1/2],$$
$$I_6 = (1/2,3/4], I_7 = (3/4,1), I_8 = (0,1/8], I_9 = (1/8,1/4], \ldots$$

e as variáveis aleatórias

$$X_n = \begin{cases} 1, & se\ U \in I_n, \\ 0, & se\ U \notin I_n. \end{cases}$$

Então, $X_n \xrightarrow{P} 0$ *mas* $X_n \not\xrightarrow{q.c} 0$.

... continuação do Exemplo 22.1. Para mostrar que

$$X_n \xrightarrow{P} 0$$

note que, dado $\epsilon > 0$:

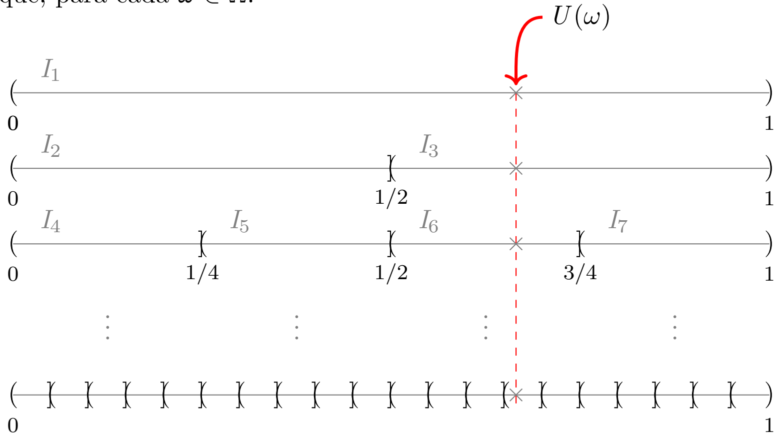
$$P(|X_n - 0| > \epsilon) = \begin{cases} P(X_n = 1), & \text{se } \epsilon \in (0,1), \\ 0, & \text{se } \epsilon \geq 1. \end{cases}$$

Logo,

- se $\epsilon \geq 1$, então $\lim_{n \to \infty} P(|X_n - 0| > \epsilon) = \lim_{n \to \infty} 0 = 0$,
- se $\epsilon \in (0,1)$, então:

$$\lim_{n \to \infty} P(|X_n - 0| > \epsilon) = \lim_{n \to \infty} P(U \in I_n) = \lim_{n \to \infty} |I_n| = 0.$$

... continuação do Exemplo 22.1. Para mostrar que $X_n \overset{q.c.}{\not\to} 0$ note que, para cada $\omega \in \Omega$:



Isto é, $X_n(\omega) = 1$ para ∞ valores de n e $X_n(\omega) = 0$ para ∞ valores de n. Portanto, para cada $\omega \in \Omega$ temos que $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$ não existe.

Lei dos Grandes Números

Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias integráveis em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e seja:

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i, \text{ para cada } n \geq 1.$$

Dizemos que $X_1, X_2, \ldots$ satisfazem:

- a Lei Fraca dos Grandes Números se:

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{P} 0.$$

- a Lei Forte dos Grandes Números se:

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{q.c.} 0.$$

Lei Fraca de Tchebychev

Teorema 22.1

Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes 2 a 2 com variâncias finitas e uniformemente limitadas. Então:

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{P} 0.$$

Prova. Dado $\epsilon > 0$ temos que

$$P\left(\left|\frac{S_n - E(S_n)}{n}\right| \geq \epsilon\right) = P\left(|S_n - E(S_n)| \geq n\epsilon\right) \leq \frac{Var\left(S_n\right)}{n^2\epsilon^2}.$$

Como existe C constante tal que $Var(X_n) < C$ para todo $n \geq 1$, então

$$\frac{Var\left(S_n\right)}{n^2\epsilon^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)}{n^2\epsilon^2} \leq \frac{nC}{n^2\epsilon^2} = \frac{C}{n\epsilon^2} \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

- Lei dos Grandes Números de Bernoulli. Considere uma sequência de ensaios binomiais independentes com a mesma probabilidade p de sucesso em cada ensaio. Se S_n é o número de sucessos nos primeiros n ensaios, então:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p.$$

Prova. Consequência da Lei Fraca de Tchebychev.

- Lei Fraca de Khintchin. Sejam $X_1, X_2, \dots$ variáveis aleatórias i.i.d. integráveis com $E(X_1) = \mu$, então:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mu.$$

Prova. Consequência da Lei Forte de Kolmogorov.

Sequências de eventos

Se $A_1, A_2, \ldots$ é uma sequência de eventos de Ω definimos:

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \text{e} \quad \liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Observação!

Notação: $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = [A_n \ \textit{infinitas vezes}] = [A_n \ i.v.]$, *pois* $\omega \in \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ *se, e somente se,* ω *pertence a um número infinito dos* A_n.

Observação!

$\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ *é o evento de ocorrência de* A_n *para* n *suficientemente grande.*

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN
Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Lema de Borel-Cantelli

Proposição 22.1

Sejam $A_1, A_2, \ldots$ *eventos aleatórios em* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

i. *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, *então*

$$P(A_n \; i.v.) = 0.$$

ii. *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ *e os eventos são independentes, então*

$$P(A_n \; i.v.) = 1.$$

Prova do Lema de Borel-Cantelli. (i) Note que

$$P(A_n\ i.v.) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \le P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \le \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)$$

mas $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0$ devido a que $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$.

(ii) Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ e que os A_n são independentes. Se conseguirmos provar que para todo $n \ge 1$

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1,$$

teremos que

$$1 = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = P(A_n\ i.v.).$$

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN
Centro de Ciências Exatas e da Natureza

... continuação da prova do Lema de Borel-Cantelli (ii). Note que

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1 - P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right)$$

e, para todo $m \geq 1$, temos que

$$P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) \leq P\left(\bigcap_{k=n}^{n+m} A_k^c\right) = \prod_{k=n}^{n+m} P\left(A_k^c\right) = \prod_{k=n}^{n+m} (1 - P(A_k)).$$

Como $1 - x \leq e^{-x}$ se $x \in [0, 1]$ então

$$P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) \leq \prod_{k=n}^{n+m} e^{-P(A_k)} = \exp\left\{-\sum_{k=n}^{n+m} P(A_k)\right\} \longrightarrow 0$$

quando $m \to \infty$. Portanto $P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) = 0$ e $P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1, \forall n.$

$X_n \xrightarrow{P} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{q.c.} X$

Exemplo 22.2

Sejam $X_1, X_2, \ldots$ *i.i.d. com* $X_1 \sim Exp(1)$ *e, para cada* $n > 1$*, seja*

$$Y_n = \frac{X_n}{\log n}.$$

Então $Y_n \xrightarrow{P} 0$ *pois, dado* $\epsilon > 0$ *temos que:*

$$P(|Y_n| \geq \epsilon) = P(X_n > \epsilon \log n) = e^{-\epsilon \log n} = \frac{1}{n^{\epsilon}} \longrightarrow 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Agora, dado $\epsilon \in (0,1)$*, os eventos* $\{Y_n \geq \epsilon\}$ *son independentes e*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(Y_n \geq \epsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\epsilon}} = \infty.$$

Logo, do Lema de Borel-Cantelli (ii) temos que $P(\{Y_n \geq \epsilon\}\ i.v.) = 1.$

$$\text{Portanto, } Y_n \overset{q.c.}{\not\to} 0.$$

Bom estudo!