ET658 - Processos Estocásticos para Atuária

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

Processos estocásticos e cadeias de Markov

Prof. Pablo M. Rodriguez

https://www.pablo-rodriguez.org/et658-processos-estocasticos

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo da Aula 3

- Processos estocásticos a tempo discreto.
- Cadeias de Markov a tempo discreto.

Processo estocástico

Um processo estocástico a tempo discreto é uma sequência de variáveis aleatórias:

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots \quad \text{ou} \quad (X_n)_{n\geq 0},$$

$n \in \mathbb{N}$, definidas no mesmo espaço de probabilidade e tomando valores em algum conjunto enumerável S.

Observação

O conjunto $\mathcal{S}$ chama-se espaço de estados do processo e cada um dos seus elementos chama-se estado.

Exemplo 3.1

Suponha que desde o dia de hoje iremos observar em que dias irá chover em uma certa cidade. Defina as variáveis aleatórias:

$$X_n = \begin{cases} 1, & \textit{se chover no } n - \textit{ésimo dia após a primeira observação;} \\ 0, & \textit{se não chover no } n - \textit{ésimo dia após a primeira observação,} \end{cases}$$

para cada $n \geq 0$*. Isto é,* 0 *representa o dia de hoje (dia da primeira observação),* 1 *amanhã,* 2 *depois de amanhã etc. Então* $(X_n)_{n \geq 0}$ *é um processo estocástico com* $\mathcal{S} = \{0, 1\}$*.*

Exemplo 3.2

- *Considere o experimento de lançar sucessivamente um dado honesto. Se Z_n é o valor observado na face superior no $n-$ésimo lançamento, então $(Z_n)_{n\geq 1}$ é um processo a tempo discreto com*

$$\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

- *Seja Y_n o número de livros vendidos por uma libraria no $n-$ésimo mês após a primeira contagem. Então, $(Y_n)_{n\geq 0}$ é um processo estocástico a tempo discreto com*

$$\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Propriedade Markoviana e Cadeia de Markov

Uma cadeia de Markov a tempo discreto (CMTD) com espaço de estados $\mathcal{S}$ é um processo estocástico $(X_n)_{n\geq 0}$ com valores em $\mathcal{S}$ tal que

$$\underbrace{P(X_{n+1}}_{\text{futuro}} = j | \underbrace{X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}}_{\text{pasado}}, \underbrace{X_n}_{\text{presente}} = i) = P(X_{n+1} = j | X_n = i),$$

para todo $n \geq 0$ e para todo subconjunto $\{i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i, j\} \subset \mathcal{S}$.

Nota!

O início da teoria das cadeias de Markov remonta-se a 1913, com o trabalho do matemático ruso A.A. Markov. Markov passou horas estudando os padrões de vogais e consoantes de uma novela de Alexander Pushkin e, embora sua análise não aportou muito ao estudo da literatura da época, suas ideias deram origem ao que conhece-se como cadeias de Markov (Hayes, 2013).

Problema 1

Suponha que a possibilidade de chuva amanhã dependa somente do fato de estar chovendo ou não no dia de hoje. Suponha também que se algum dia está chovendo, então no dia seguinte choverá com probabilidade $0,3$*; mas se em um dia não estiver chovendo, então no dia seguinte choverá com probabilidade* $0,8$*. Se a probabilidade de chover hoje é* $0,1$*, calcule a probabilidade de que chova daqui a dois dias.*

Solução. Defina as variáveis aleatórias:

$$X_n = \begin{cases} 1, & \text{se chover no } n-\text{ésimo dia após a primeira observação;} \\ 0, & \text{se não chover no } n-\text{ésimo dia após a primeira observação,} \end{cases}$$

para cada $n \geq 0$. Lembre que 0 representa o dia de hoje.

$$\text{Queremos calcular } P(X_2 = 1).$$

... continuação do Problema 1. Do enunciado sabemos que, para qualquer n, $n \geq 0$:

$$P(X_{n+1} = 1 | X_n = 1) = P(\text{chover no dia } n+1 | \text{ choveu no dia } n) = 0,3$$

e que

$$P(X_{n+1} = 1 | X_n = 0) = P(\text{chover no dia } n+1 | \text{ não choveu no dia } n) = 0,8.$$

Agora, podemos deduzir que

$$P(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) = 1 - P(X_{n+1} = 1 | X_n = 1) = 1 - 0,3 = 0,7$$

e que

$$P(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) = 1 - P(X_{n+1} = 1 | X_n = 0) = 1 - 0,8 = 0,2.$$

Também sabemos que $P(X_0 = 1) = 0,1$ e que $P(X_0 = 0) = 0,9$.

... continuação do Problema 1. Note que o evento $\{X_2 = 1\}$ é igual à união dos seguintes eventos mutuamente exclusivos:

$$\{X_2 = 1, X_1 = 1, X_0 = 1\}$$

$$\cup$$

$$\{X_2 = 1, X_1 = 1, X_0 = 0\}$$

$$\cup$$

$$\{X_2 = 1, X_1 = 0, X_0 = 1\}$$

$$\cup$$

$$\{X_2 = 1, X_1 = 0, X_0 = 0\}$$

... continuação do Problema 1. Em outras palavras, $P(X_2 = 1)$ é igual à soma das seguintes probabilidades:

$$P(X_2 = 1, X_1 = 1, X_0 = 1)$$

$$+$$

$$P(X_2 = 1, X_1 = 1, X_0 = 0)$$

$$+$$

$$P(X_2 = 1, X_1 = 0, X_0 = 1)$$

$$+$$

$$P(X_2 = 1, X_1 = 0, X_0 = 0)$$

... continuação do Problema 1. Agora observe que, por exemplo,

$$P(X_2 = 1, X_1 = 0, X_0 = 1) = \underbrace{P(X_2 = 1 | X_1 = 0, X_0 = 1)} \underbrace{P(X_1 = 0 | X_0 = 1)}_{= 0,7} \underbrace{P(X_0 = 1)}_{= 0,1}$$

propriedade
Markoviana

$$\underbrace{P(X_2 = 1 | X_1 = 0)}_{= 0,8} =$$

Isto é,

$$P(X_2 = 1, X_1 = 0, X_0 = 1) = 0,8 \times 0,7 \times 0,1 = 0,056$$

Probabilidades de transição

Dada uma CMTD $(X_n)_{n\geq 0}$, supomos que para todo $i, j \in \mathcal{S}$ e para todo $n \geq 0$ as probabilidades

$$p(i,j) := P(X_{n+1} = j | X_n = i),$$

chamadas probabilidades de transição não dependem de n. Neste caso dizemos que a cadeia de Markov é homogênea.

Note que $p(i,j) \in [0,1]$ e que $\sum_{j\in\mathcal{S}} p(i,j) = 1$.

De fato:

$$\sum_{j\in\mathcal{S}} P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P\left(\bigcup_{j\in\mathcal{S}} \{X_{n+1} = j\} \Big| X_n = i \right) = P(\Omega | X_n = i) = 1.$$

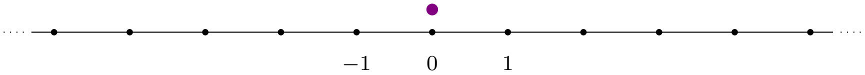
Uma cadeia de Markov pode ser completamente determinada pelas probabilidades de transição e pela distribuição do seu estado inicial:

$$\text{se } P(X_0 = i) = \alpha_i, \text{ para todo } i \in \mathcal{S}, \text{ com } \alpha_i \in [0,1] \text{ e } \sum_{i \in \mathcal{S}} \alpha_i = 1,$$

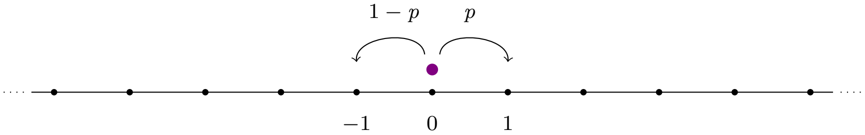
então

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = \alpha_{i_0}\, p(i_0, i_1)\, p(i_1, i_2)\, \ldots\, p(i_{n-1}, i_n).$$

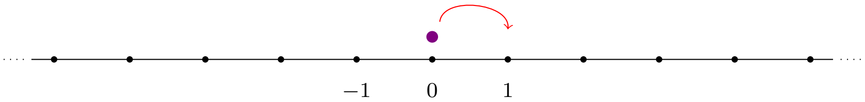
Exemplo: o passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



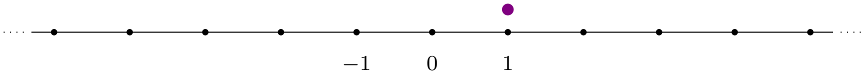
Exemplo: o passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



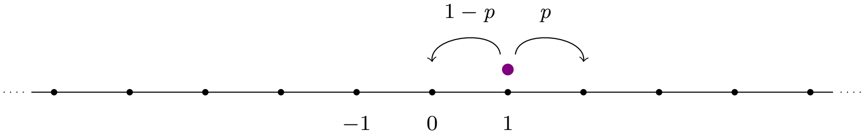
Exemplo: o passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



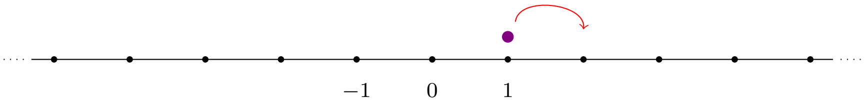
Exemplo: o passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



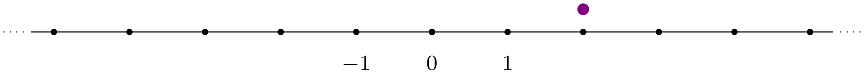
Exemplo: o passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



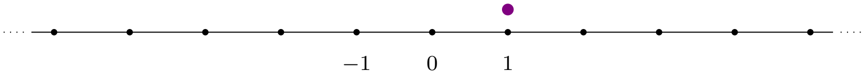
Exemplo: o passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



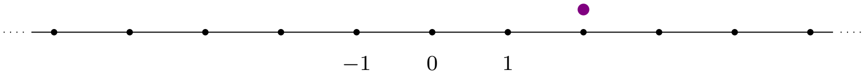
Exemplo: o passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



Exemplo: o passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



Exemplo: o passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



O passeio aleatório em $\mathbb{Z}$

Consideramos a sequência de v.a. i.i.d. $X_1, X_2, X_3, \ldots$ tal que

$$P(X_1 = 1) = p \quad \text{e} \quad P(X_1 = -1) = 1 - p.$$

Se Y_n denota a posição da partícula no n-ésimo instante de tempo, então a sequência $(Y_n)_{n \geq 0}$ chama-se passeio aleatório em $\mathbb{Z}$ e é uma cadeia de Markov com espaço de estados $\mathbb{Z}$ e probabilidades de transição:

$$p(i,j) = P(Y_{n+1} = j \,|\, Y_n = i) = \begin{cases} p, & \text{para } j = i + 1, \\ 1 - p, & \text{para } j = i - 1, \\ 0, & \text{para } j \neq i \pm 1. \end{cases}$$

Note que

$$Y_n = Y_{n-1} + X_n, \quad \text{para todo } n \in \{1, 2, \dots\}.$$

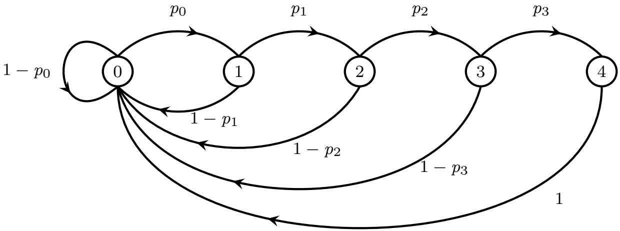
Isto é, $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ e portanto

$$E(Y_n) = E(X_1 + X_2 + \cdots X_n) = n\,E(X_1) = n\,(2p - 1).$$

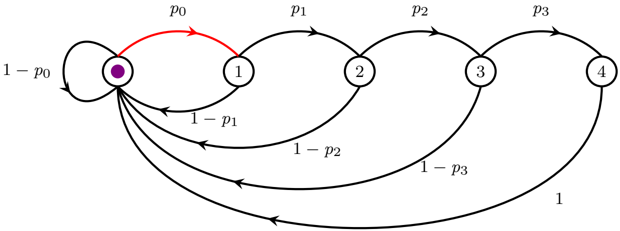
Logo,

- se $p = 1/2$ então $E(Y_n) = 0$ para todo n;
- se $p = 1/2 + \epsilon$ com $\epsilon > 0$ então $E(Y_n) = 2\epsilon n \to \infty$;
- se $p = 1/2 - \epsilon$ com $\epsilon > 0$ então $E(Y_n) = -2\epsilon n \to -\infty$.

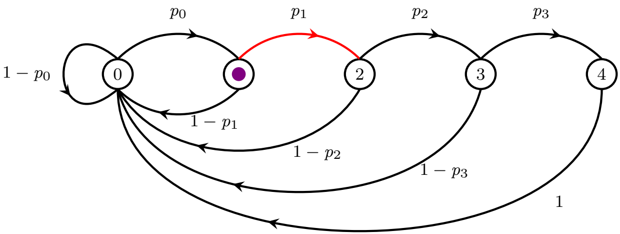
Exemplo: passeio aleatório em um grafo finito



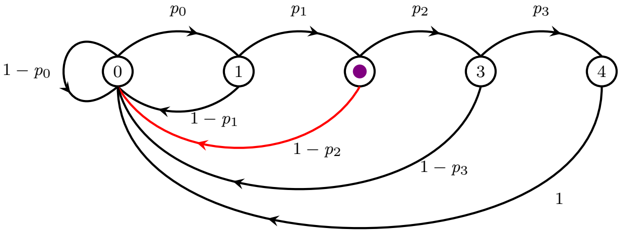
Exemplo: passeio aleatório em um grafo finito



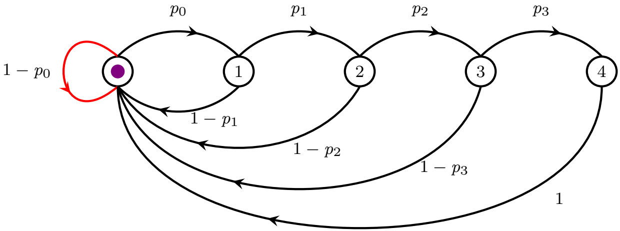
Exemplo: passeio aleatório em um grafo finito



Exemplo: passeio aleatório em um grafo finito



Exemplo: passeio aleatório em um grafo finito



O passeio aleatório em um grafo finito orientado

Se Y_n denota a posição da partícula no n-ésimo instante de tempo,

... então a sequência $(Y_n)_{n\geq 0}$ chama-se passeio aleatório no grafo considerado e é uma cadeia de Markov com espaço de estados $\{0,1,2,3,4\}$ e probabilidades de transição:

$$p(i,j) = P(Y_{n+1} = j | Y_n = i) = \begin{cases} p_i, & \text{para } j = i+1 \text{ e } i \in \{0,1,2,3\}, \\ 1-p_i, & \text{para } j = 0 \text{ e } i \in \{0,1,2,3\}, \\ 1, & \text{para } j = 0 \text{ e } i = 4, \\ 0, & \text{para qualquer outro caso.} \end{cases}$$

Matriz de transição

Podemos reunir a informação das probabilidades de transição em uma matriz P, chamada matriz de transição, cujas entradas são os valores $p(i,j)$. Se $|\mathcal{S}| = n$, a matriz de transição é dada por:

$$P := \begin{bmatrix} p(1,1) & p(1,2) & p(1,3) & \dots & p(1,n) \\ p(2,1) & p(2,2) & p(2,3) & \dots & p(2,n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p(n,1) & p(n,2) & p(n,3) & \dots & p(n,n) \end{bmatrix}.$$

Lembre que se $i, j \in \mathcal{S}$ então $p(i,j) \in [0,1]$ e $\sum_{j \in \mathcal{S}} p(i,j) = 1$.

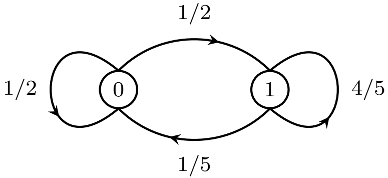
Uma matriz com estas propriedades chama-se matriz estocástica.

Representação gráfica de uma cadeia de Markov

Considere a CMTD $(X_n)_{n\geq 0}$ com espaço de estados $\{0,1\}$ e matriz de transição dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}.$$

Podemos representar:

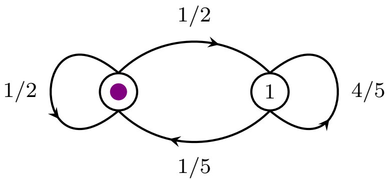


Representação gráfica de uma cadeia de Markov

Considere a CMTD $(X_n)_{n\geq 0}$ com espaço de estados $\{0,1\}$ e matriz de transição dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}.$$

Podemos representar:



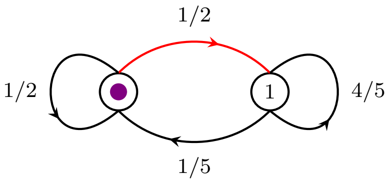
$$X_0 = 0$$

Representação gráfica de uma cadeia de Markov

Considere a CMTD $(X_n)_{n\geq 0}$ com espaço de estados $\{0,1\}$ e matriz de transição dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}.$$

Podemos representar:



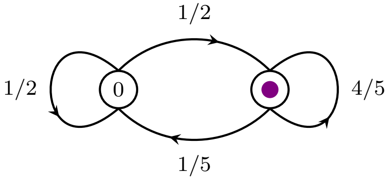
$X_0 = 0$

Representação gráfica de uma cadeia de Markov

Considere a CMTD $(X_n)_{n\geq 0}$ com espaço de estados $\{0,1\}$ e matriz de transição dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}.$$

Podemos representar:



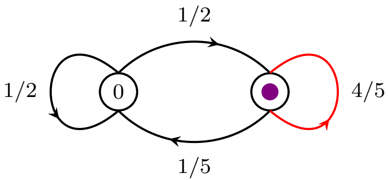
$$X_1 = 1$$

Representação gráfica de uma cadeia de Markov

Considere a CMTD $(X_n)_{n\geq 0}$ com espaço de estados $\{0, 1\}$ e matriz de transição dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}.$$

Podemos representar:



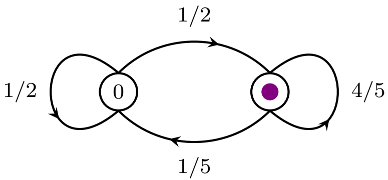
$X_1 = 1$

Representação gráfica de uma cadeia de Markov

Considere a CMTD $(X_n)_{n\geq 0}$ com espaço de estados $\{0,1\}$ e matriz de transição dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}.$$

Podemos representar:



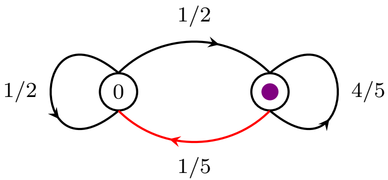
$X_2 = 1$

Representação gráfica de uma cadeia de Markov

Considere a CMTD $(X_n)_{n\geq 0}$ com espaço de estados $\{0,1\}$ e matriz de transição dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}.$$

Podemos representar:



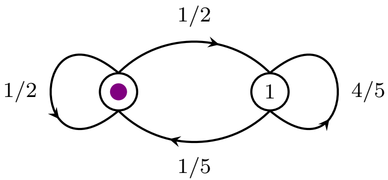
$X_2 = 1$

Representação gráfica de uma cadeia de Markov

Considere a CMTD $(X_n)_{n\geq 0}$ com espaço de estados $\{0, 1\}$ e matriz de transição dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}.$$

Podemos representar:



$$X_3 = 0$$

Note que $P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0 | X_0 = 0) = p(0, 1)p(1, 1)p(1, 0) = 2/25.$

Probabilidades de transição em n passos

Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ uma CMTD com espaço de estados $\mathcal{S}$. Chama-se probabilidades de transição em n passos às probabilidades

$$p_n(i,j) := P(X_{m+n} = j | X_m = n),$$

para todo $m, n \geq 0$ e $i, j \in \mathcal{S}$. Neste caso

$$p_1(i,j) = p(i,j)$$

e por convenção supomos que

$$p_0(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Equações de Chapman-Kolmogorov

Proposição 3.1

Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ *uma CMTD com espaço de estados* $\mathcal{S}$. *Então,*

$$p_{n+r}(i,j) = \sum_{k\in\mathcal{S}} p_n(i,k)p_r(k,j),$$

para todo $n, r \geq 0$ *e* $i, j \in \mathcal{S}$.

Prova das Equações de Chapman-Kolmogorov. Por definição

$$p_{n+r}(i,j) = P(X_{n+r} = j | X_0 = i).$$

Por outro lado, $\{X_{n+r} = j\} = \bigcup_{k \in \mathcal{S}} (X_{n+r} = j, X_n = k)$ e então

$$p_{n+r}(i,j) = \sum_{k \in \mathcal{S}} P(X_{n+r} = j, X_n = k | X_0 = i).$$

Além disto

$$P(X_{n+r} = j, X_n = k | X_0 = i)$$

$$\parallel$$

$$P(X_{n+r} = j | X_n = k, X_0 = i) P(X_n = k | X_0 = i)$$

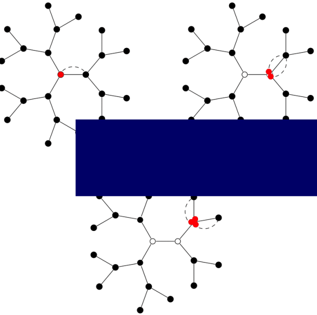
mas

$$P(X_{n+r} = j | X_n = k, X_0 = i) = P(X_{n+r} = j | X_n = k) = p_r(k,j) \text{ (Markov)}$$

$$\ldots \text{ e } P(X_n = k | X_0 = i) = p_n(i,k).$$

Referência!

Ross, S. Introduction to Probability Models. 10th ed. Academic Press. 2010.



Bom estudo!