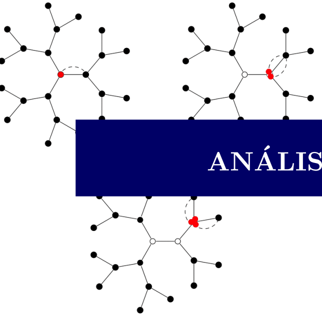
PGE966 - Processos Estocásticos

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE



ANÁLISE DO PRIMEIRO PASO. ACOPLAMENTO

Prof. Pablo M. Rodriguez

https://www.pablo-rodriguez.org

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN
Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo

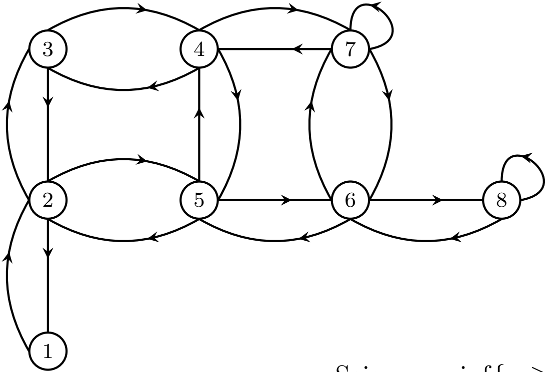
- Método de análise do primeiro passo.
- Cadeias de nascimento e morte.
- Acoplamento.

Exemplo 1.1

Considere a CMTD $(X_n)_{n\geq 0}$ *com* $\mathcal{S} = \{1, 2, \ldots, 8\}$ *e matriz de transição*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

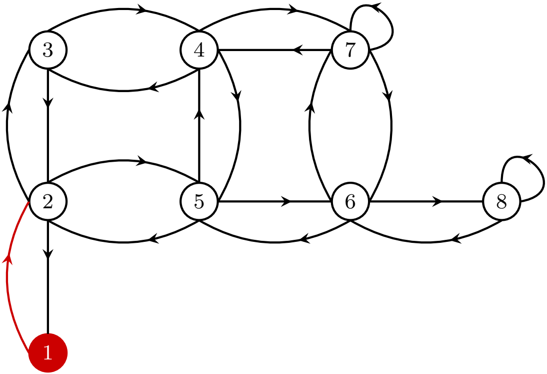
Isto é, considere $(X_n)_{n\geq 0}$ tal que:



Seja $\tau_k := \inf\{n \geq 0 : X_n = k\}$.

Vamos calcular $P(\tau_8 < \tau_7 | X_0 = 2)$.

Seja $p_i := P(\tau_8 < \tau_7 | X_0 = i)$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ e note que:

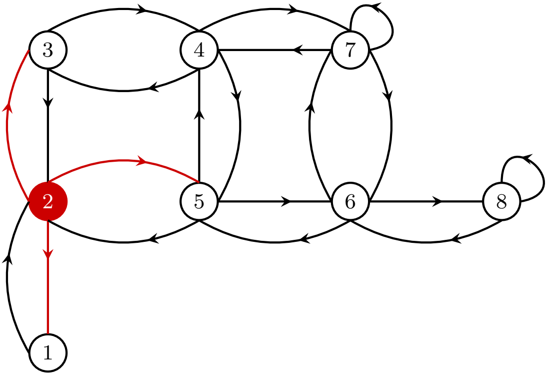


$$p_1 = P(\tau_8 < \tau_7 | X_0 = 1, X_1 = 2) P(X_1 = 2 | X_0 = 1) = p_2$$

De fato,

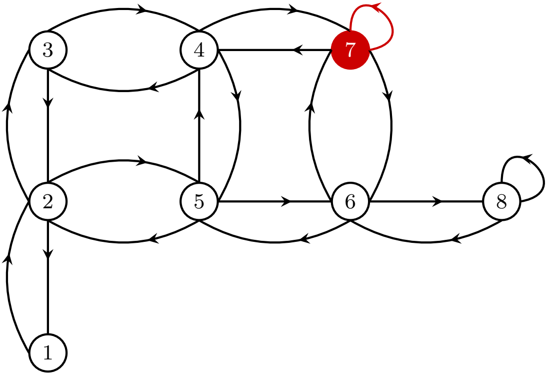
$$
\begin{aligned}
p_1 &= P(\tau_8 < \tau_7 | X_0 = 1) \\
&= \sum_{i=1}^{8} P(\tau_8 < \tau_7 | X_0 = 1, X_1 = i) P(X_1 = i | X_0 = 1) \\
&= P(\tau_8 < \tau_7 | X_0 = 1, X_1 = 2) P(X_1 = 2 | X_0 = 1) \\
&= P(\tau_8 < \tau_7 | X_0 = 1, X_1 = 2) \\
&= P(\tau_8 < \tau_7 | X_1 = 2) \qquad \text{(propriedade Markoviana)} \\
&= P(\tau_8 < \tau_7 | X_0 = 2) \qquad \text{(a CMTD é homogênea)} \\
&= p_2
\end{aligned}
$$

Seja $p_i := P(\tau_8 < \tau_7 | X_0 = i)$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ e note que:



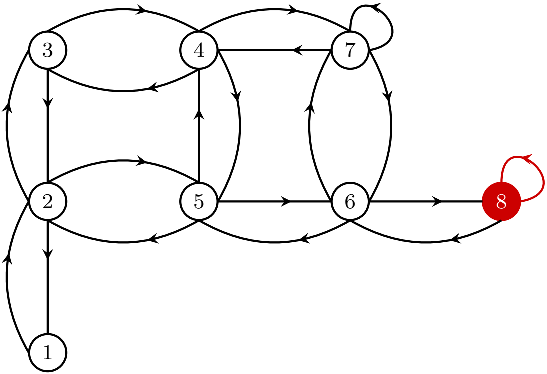
$$p_2 = (1/3)\, p_1 + (1/3)\, p_3 + (1/3)\, p_5$$

Seja $p_i := P(\tau_8 < \tau_7 | X_0 = i)$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ e note que:



$$p_7 = P(\tau_8 < \tau_7 | X_0 = 7) = 0$$

Seja $p_i := P(\tau_8 < \tau_7 | X_0 = i)$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ e note que:



$$p_8 = P(\tau_8 < \tau_7 | X_0 = 8) = 1$$

Desta forma, como $p_7 = 0$ e $p_8 = 1$, conseguimos:

$$\begin{cases} p_1 &= p_2, \\ p_2 &= (1/3)\, p_1 + (1/3)\, p_3 + (1/3)\, p_5, \\ p_3 &= (1/2)\, p_2 + (1/2)\, p_4, \\ p_4 &= (1/3)\, p_3 + (1/3)\, p_5, \\ p_5 &= (1/3)\, p_2 + (1/3)\, p_4 + (1/3)\, p_6, \\ p_6 &= (1/3)\, p_5 + (1/3). \end{cases}$$

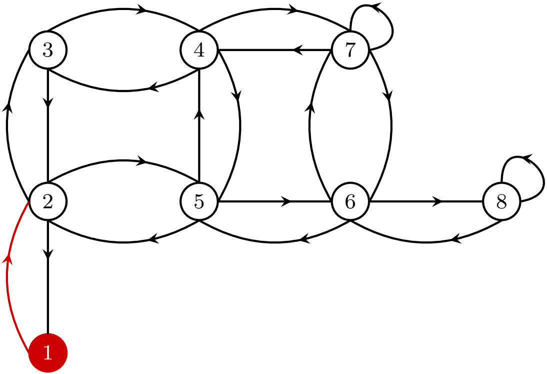
Assim, $p_1 = p_2 = 3/13$, $p_3 = 5/26$, $p_4 = 2/13$, $p_5 = 7/26$ e $p_6 = 11/26$.

... continuação do Exemplo 1. Agora, se:

$$T := \inf\{n \geq 0 : X_n \in \{7, 8\}\},$$

então podemos calcular de forma análoga: $E(T|X_0 = 2)$.

Seja $m_i := E(T|X_0 = i)$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ e note que:

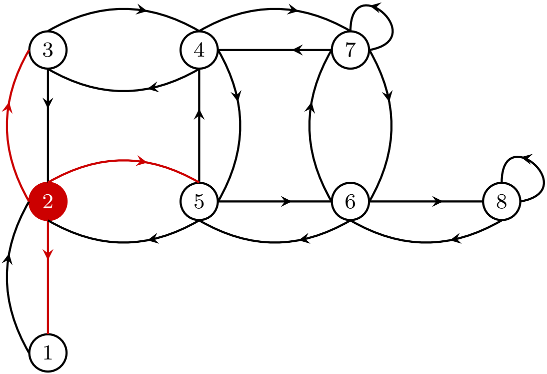


$$m_1 = E(T|X_0 = 1, X_1 = 2)P(X_1 = 2|X_0 = 1) = 1 + m_2$$

De fato,

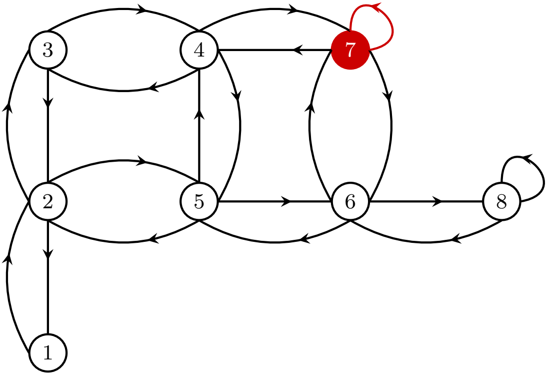
$$
\begin{aligned}
m_1 &= E(T|X_0 = 1) \\
&= \sum_{i=1}^{8} E(T|X_0 = 1, X_1 = i) P(X_1 = i|X_0 = 1) \\
&= E(T|X_0 = 1, X_1 = 2) P(X_1 = 2|X_0 = 1) \\
&= 1 + E(T|X_0 = 2) \\
&= 1 + m_2
\end{aligned}
$$

Seja $m_i := E(T|X_0 = i)$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ e note que:



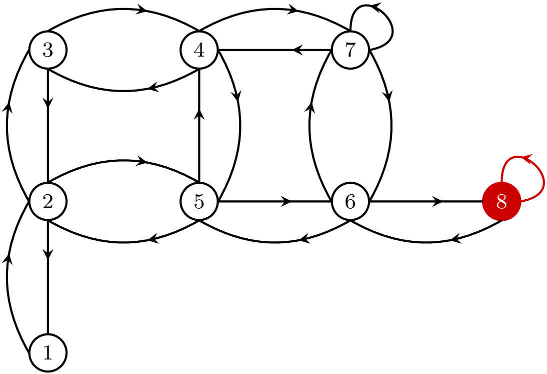
$$m_2 = (1/3)(1 + m_1) + (1/3)(1 + m_3) + (1/3)(1 + m_5)$$

Seja $m_i := E(T|X_0 = i)$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ e note que:



$$m_7 = E(T|X_0 = 7) = 0$$

Seja $m_i := E(T|X_0 = i)$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ e note que:



$$m_8 = E(T|X_0 = 8) = 0$$

Desta forma, como $m_7 = m_8 = 0$, conseguimos:

$$\begin{cases} m_1 &=& 1 + m_2, \\ m_2 &=& 1 + (1/3)(m_1 + m_3 + m_5), \\ m_3 &=& 1 + (1/2)\,(m_2 + m_4), \\ m_4 &=& 1 + (1/3)\,(m_3 + m_5), \\ m_5 &=& 1 + (1/3)\,(m_2 + m_4 + m_6), \\ m_6 &=& (1/3)\,m_5. \end{cases}$$

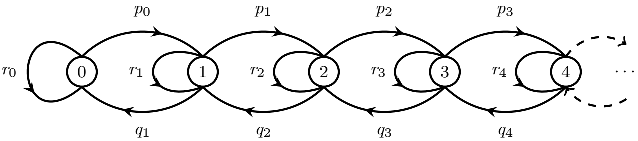
Assim $m_1 = 145/13$, $m_2 = 132/13$, $m_3 = 123/13$, $m_4 = 88/13$, $m_5 = 102/13$ e $m_6 = 47/13$.

Aplicação: cadeias de nascimento e morte

Uma cadeia de nascimento e morte é uma CMTD com $\mathcal{S} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ e probabilidades de transição:

$$p(i,j) = \begin{cases} p_i, & \text{se } j = i+1, \\ r_i, & \text{se } j = i, \\ q_i, & \text{se } j = i-1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

com $q_0 = 0$. Supomos $q_i > 0$ para cada $i > 0$ e $p_i > 0$ para todo $i \geq 0$. Note que deve ser $p_i + r_i + q_i = 1$ para cada $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.



Universidade Federal de Pernambuco

CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Recorrência e transiência em CNM

Teorema 1.1

Considere uma CNM com probabilidades $\{(p_i, r_i, q_i)\}_{i\geq 0}$. *Seja*

$$\alpha_k := \prod_{i=1}^{k} \frac{q_i}{p_i}, \ \textit{para todo } k \in \mathbb{N}$$

e seja $\alpha_0 := 1$. *Então, a CNM é recorrente se, e somente se,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty.$$

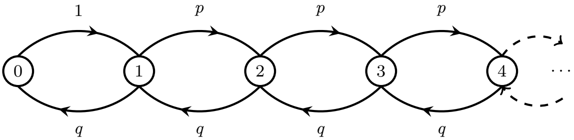
Prova. Ver Proposição I.4.1 (página 16) de Schinazi (1999).

Corolário 1.1

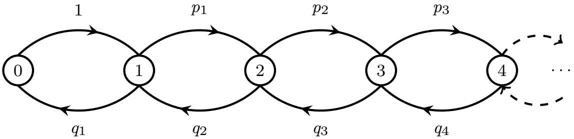
O passeio aleatório em $\mathbb{Z}^+$ *é recorrente se, e somente se,* $p \leq 1/2$.

Acoplamento: motivação!

Sabemos que



é recorrente se, e somente se, $p \leq 1/2$. O que podemos dizer de:



quando comparamos p_i, para cada i, com $1/2$?

Consideramos CNM com $p_0 = 1$ e $p_i > 0,\ q_i > 0,\ r_i = 0$ para $i \in \mathbb{N}$.

Teorema I.5.1 de Schinazi (1999)

Consideremos duas CNM

$$\{X_n\}_{n\geq 0} \quad e \quad \{X'_n\}_{n\geq 0}$$

com probabilidades

$$\{(p_i, q_i)\}_{i\geq 1} \quad e \quad \{(p'_i, q'_i)\}_{i\geq 1},$$

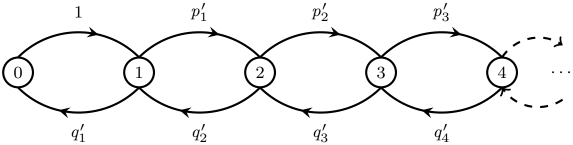
respectivamente, tais que $p_i \leq p'_i$ *para todo* $i \in \mathbb{N}$. *Então, podemos construir ambas CNM no mesmo espaço de probabilidade de forma que*

$$X_0 = X'_0 \quad e \quad X_n \leq X'_n$$

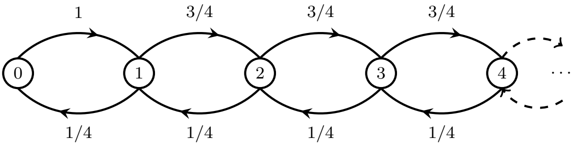
para todo $n \geq 1$.

Exemplo I.5.1 de Schinazi (1999)

Considere $\{X'_n\}_{n\geq 0}$ *tal que:*



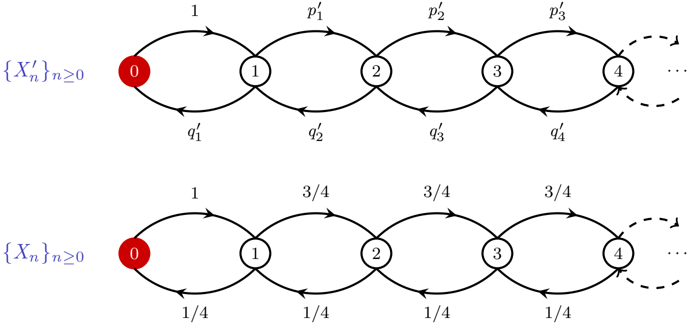
com $p'_i > 3/4$ *para todo* $i \geq 1$. *Comparando com a cadeia* $\{X_n\}_{n\geq 0}$:



concluímos do teorema anterior que $\{X'_n\}_{n\geq 0}$ *é transiente.*

... continuação. De fato, podemos acoplar ambas cadeias de forma que

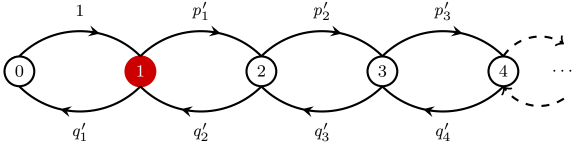
$$X_0 = X_0' \quad \text{e} \quad X_n \leq X_n' \quad \text{para todo } n \geq 1.$$



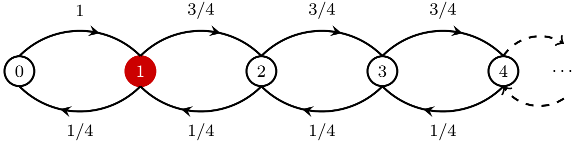
. . . continuação. De fato, podemos acoplar ambas cadeias de forma que

$$X_0 = X_0' \quad \text{e} \quad X_n \leq X_n' \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

$\{X_n'\}_{n\geq 0}$



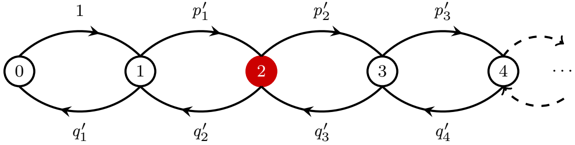
$\{X_n\}_{n\geq 0}$



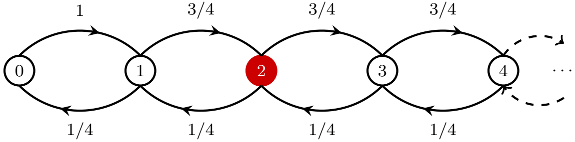
... continuação. De fato, podemos acoplar ambas cadeias de forma que

$$X_0 = X_0' \quad \text{e} \quad X_n \leq X_n' \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

$\{X_n'\}_{n\geq 0}$

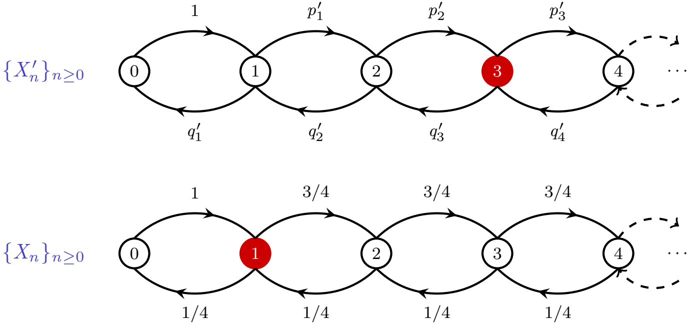


$\{X_n\}_{n\geq 0}$



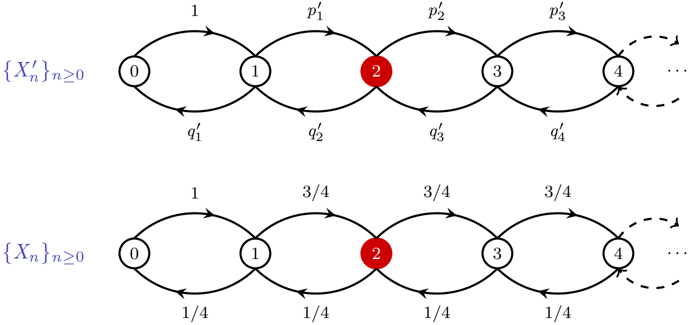
... continuação. De fato, podemos acoplar ambas cadeias de forma que

$$X_0 = X_0' \quad \text{e} \quad X_n \leq X_n' \quad \text{para todo } n \geq 1.$$



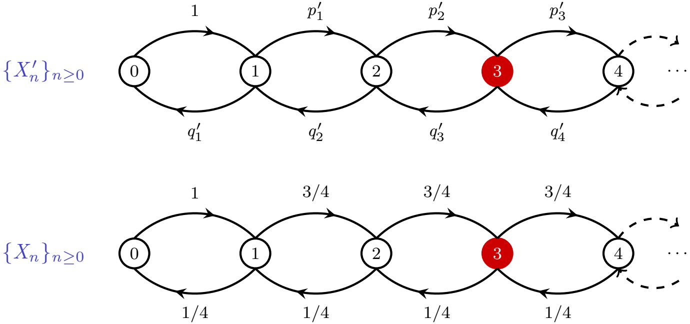
. . . continuação. De fato, podemos acoplar ambas cadeias de forma que

$$X_0 = X'_0 \quad \text{e} \quad X_n \le X'_n \quad \text{para todo } n \ge 1.$$



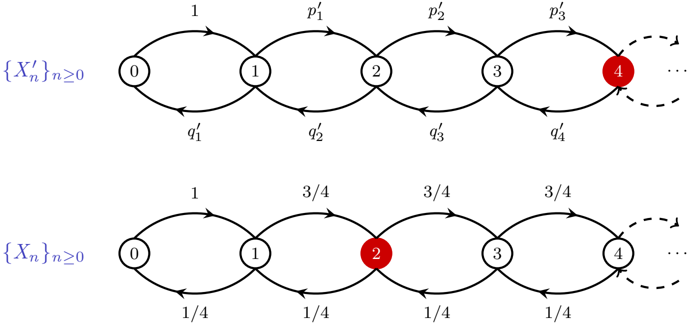
. . . continuação. De fato, podemos acoplar ambas cadeias de forma que

$$X_0 = X_0' \quad \text{e} \quad X_n \leq X_n' \quad \text{para todo } n \geq 1.$$



... continuação. De fato, podemos acoplar ambas cadeias de forma que

$$X_0 = X_0' \quad \text{e} \quad X_n \leq X_n' \quad \text{para todo } n \geq 1.$$



. . . continuação. Como

$$P(\tau_0 = \infty | X_0 = 0) > 0$$

e como, dado que $X_0 = X_0' = 0$,

$$\{\tau_0 = \infty\} \subset \{\tau_0' = \infty\}$$

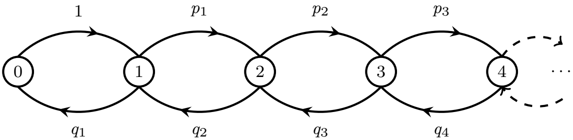
temos que

$$0 < P(\tau_0 = \infty | X_0 = 0) \leq P(\tau_0' = \infty | X_0' = 0).$$

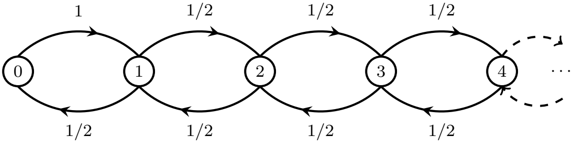
Isto é, a CNM $\{X_n'\}_{n \geq 0}$ é transiente.

Exemplo I.5.2 de Schinazi (1999)

Considere $\{X_n\}_{n\geq 0}$ *tal que:*



com $p_i \leq 1/2$ *para todo* $i \geq 1$. *Comparando com a cadeia* $\{X'_n\}_{n\geq 0}$:



concluímos do teorema anterior que $\{X_n\}_{n\geq 0}$ *é recorrente.*

... continuação. De fato, podemos acoplar ambas cadeias de forma que

$$X_0 = X_0' \quad \text{e} \quad X_n \leq X_n' \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Como

$$P(\tau_0' < \infty | X_0' = 0) = 1$$

e como, dado que $X_0 = X_0' = 0$,

$$\{\tau_0' < \infty\} \subset \{\tau_0 < \infty\}$$

temos que

$$1 = P(\tau_0' < \infty | X_0' = 0) \leq P(\tau_0 < \infty | X_0 = 0).$$

Isto é, a CNM $\{X_n\}_{n \geq 0}$ é recorrente.

Prova do Teorema I.5.1 de Schinazi (1999). Vamos construir ambas CNM no mesmo espaço de probabilidade. Considere uma sequência:

$$\{U_i\}_{i\geq 1} \text{ i.i.d. com } U_1 \sim \mathit{Uniforme}(0,1).$$

Dado $X_n = i$, podemos definir:

$$X_{n+1} = \begin{cases} i+1, & \text{se } U_n \leq p_i, \\ i-1, & \text{se } U_n > p_i, \end{cases}$$

para todo $i \in \mathbb{N}$ e $X_{n+1} = 1$ se $i = 0$. Note que, para $i \in \mathbb{N}$

$$P(X_{n+1} = i+1 | X_n = i) = P(U_n \leq p_i | X_n = i) = P(U_n \leq p_i) = p_i,$$

e $P(X_{n+1} = i-1 | X_n = i) = 1 - p_i$. Note: $P(X_{n+1} = 1 | X_n = 0) = 1$.

Logo, $\{X_n\}_{n\geq 0}$ está bem definida e é função das v.a. U_i's.

... continuação. Da mesma forma definimos: dado $X'_n = i$,

$$X'_{n+1} = \begin{cases} i+1, & \text{se } U_n \leq p'_i, \\ i-1, & \text{se } U_n > p'_i, \end{cases}$$

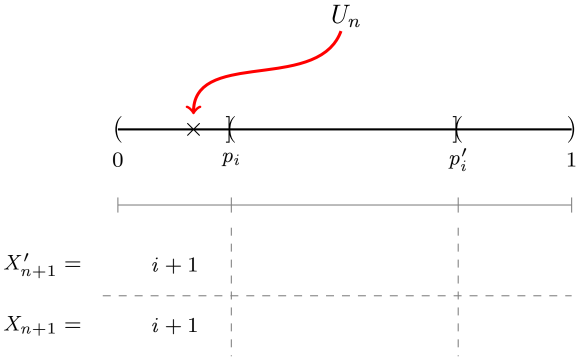
para todo $i \in \mathbb{N}$ e $X'_{n+1} = 1$ se $i = 0$. Note que, para $i \in \mathbb{N}$

$$P(X'_{n+1} = i+1 | X'_n = i) = P(U_n \leq p'_i | X'_n = i) = P(U_n \leq p'_i) = p'_i,$$

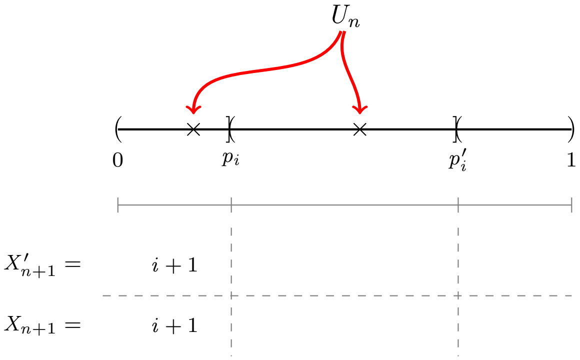
e $P(X'_{n+1} = i-1 | X'_n = i) = 1 - p'_i$. Note: $P(X'_{n+1} = 1 | X'_n = 0) = 1$.

Logo, $\{X'_n\}_{n \geq 0}$ está bem definida e é função das mesmas v.a. U_i's.

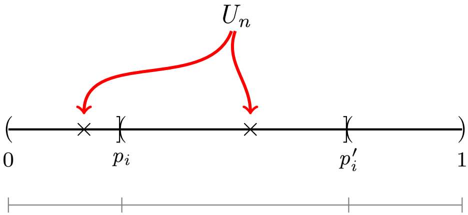
. . . continuação. Suponha $X_0 = X'_0$ e que para todo $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ temos $X_k = X'_k$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Se $X_n = X'_n = i \in \mathbb{N}$ então:



. . . continuação. Suponha $X_0 = X_0'$ e que para todo $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ temos $X_k = X_k'$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Se $X_n = X_n' = i \in \mathbb{N}$ então:

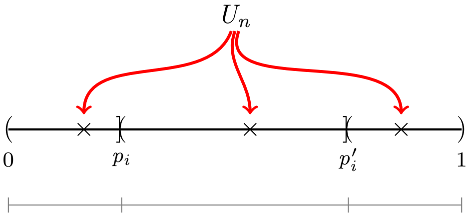


. . . continuação. Suponha $X_0 = X'_0$ e que para todo $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ temos $X_k = X'_k$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Se $X_n = X'_n = i \in \mathbb{N}$ então:



$X'_{n+1} =$	$i+1$	$i+1$	
$X_{n+1} =$	$i+1$	$i-1$	

. . . continuação. Suponha $X_0 = X_0'$ e que para todo $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ temos $X_k = X_k'$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Se $X_n = X_n' = i \in \mathbb{N}$ então:



$X_{n+1}' =$	$i+1$	$i+1$	$i-1$
$X_{n+1} =$	$i+1$	$i-1$	$i-1$

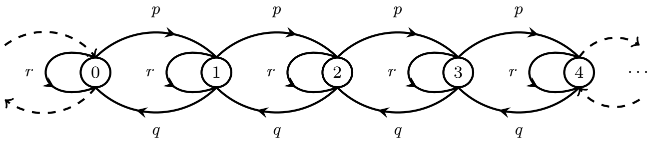
Note que em qualquer caso temos que $X_{n+1} \leq X_{n+1}'$.

O passeio aleatório preguiçoso em $\mathbb{Z}$

É a cadeia C.M.T.D. $\{X_n\}_{n\geq 0}$ com $\mathcal{S} = \mathbb{Z}$ e probabilidades de transição:

$$p(i,j) = \begin{cases} p, & \text{se } j = i+1, \\ r, & \text{se } j = i, \\ q, & \text{se } j = i-1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

Supomos $p > 0$, $r > 0$ e $q > 0$. Note que deve ser $p + r + q = 1$.



Se definimos, para cada $i \geq 1$, as variáveis aleatórias

$$T_1 := \inf\{n > 0 : X_n \neq X_{n-1}\},$$
$$T_i := \inf\{n > T_{i-1} : X_n \neq X_{n-1}\}, \text{ para } i \geq 2,$$

então, o processo estocástico $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ tal que, para cada $k \geq 0$

$$Y_k := X_{T_k}$$

é um passeio aleatório em $\mathbb{Z}$ com probabilidades de transição:

$$p(i,j) = \begin{cases} \dfrac{p}{p+q}, & \text{se } j = i+1, \\ \dfrac{q}{p+q}, & \text{se } j = i-1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ é recorrente $\iff$ $\{X_n\}_{n\geq 0}$ é recurrente.

Transiência do P.A.S. em $\mathbb{Z}^4$

O P.A.S. em $\mathbb{Z}^4$ pode ser acoplado com um P.A. preguiçoso em $\mathbb{Z}^3$ $\{X_n\}_{n\geq 0}$ tal que: para $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{Z}^3$

$$p(u,v) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & \text{se } v \in \{(u_1, u_2 \pm 1, u_3), (u_1 \pm 1, u_2, u_3), (u_1, u_2, u_3 \pm 1)\}, \\ \frac{2}{8}, & \text{se } v = (u_1, u_2, u_3), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

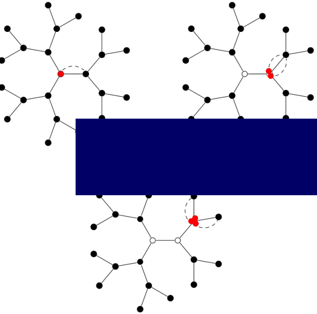
Como no caso unidimensional, podemos concluir que $\{X_n\}_{n\geq 0}$ é transiente se, e somente se, o respectivo $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ é transiente. Mas neste caso, $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ é o P.A.S. em $\mathbb{Z}^3$.

Observação

O P.A. preguiçoso aparece na literatura em inglês como lazy random walk.

Referências principais

R. Schinazi. Classical and Spatial Stochastic Processes, Birkhäuser Boston, 1999. Ver também: Uma introdução aos processos estocásticos espaciais, IMPA, 1995.



Bom estudo!

Prof. Pablo M. Rodriguez

https://www.pablo-rodriguez.org

e-mail: pablo@de.ufpe.br