Aula 8: Variáveis aleatórias

Disciplina: PGE950 - Probabilidade

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE

Prof. Pablo M. Rodriguez

http://www.pablo-rodriguez.org

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

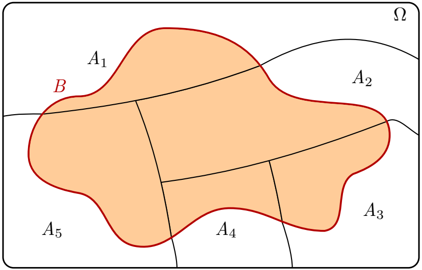
Conteúdo desta aula

- Outras distribuições
- Problemas e exemplos

Exercícios!

Exercício 1 (Lista 4). Seja $A_1, A_2, \ldots, A_n$ uma partição de Ω. Mostre que $P(B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$, para todo $B \in \mathcal{F}$.

Solução. Lembre que (por exemplo para $n = 5$)



$$P(B) = P\left(B \cap \left\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right\}\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{B \cap A_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i).$$

Aplicação

Se $X \sim Poisson(\lambda)$, $Y \sim Poisson(\mu)$ e são independentes então:

$$X + Y \sim Poisson(\lambda + \mu).$$

$$\begin{aligned}
P(X+Y=n) &= \sum_{i=0}^{n} P(\{X+Y=n\} \cap \{Y=i\}) \\
&= \sum_{i=0}^{n} P(\{X=n-i\} \cap \{Y=i\}) \\
&= \sum_{i=0}^{n} P(X=n-i)P(Y=i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left\{ \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n-i}}{(n-i)!} \right\} \left\{ \frac{e^{-\mu}\mu^{i}}{i!} \right\} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^n}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \right)^{n-i} \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} \right)^{i} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Exercícios!

Exercício 6 (Lista 5). Seja X uma variável aleatória e F sua função de distribuição. Mostre que $\Lambda_n = \left\{x \in \mathbb{R} : F(x) - F(x-) > \frac{1}{n}\right\}$, tem no máximo n elementos.

Solução. Fixe $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, suponha que $\Lambda_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ com $m > n$. Então,

$$P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_i-) > \frac{1}{n}$$

para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Logo,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} \{X = x_i\}\right) = \sum_{i=1}^{m} P(X = x_i) > \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n} = \frac{m}{n} > 1.$$

Chega-se a uma contradição. Portanto, $|\Lambda_n| \leq n$.

Exercícios!

Exercício 9b (Lista 5). Seja X uma variável aleatória contínua com função de distribuição F_X e função densidade f_X. Determine a função densidade da variável aleatória $Y = e^X$.

Solução. Lembre que $F'_X(a) = f_X(a)$. Note que, independente dos valores de X a variável aleatória Y toma valores em $(0, \infty)$. Se $F_Y(a) = P(Y \leq a)$ então

$$F_Y(a) = P\left(e^X \leq a\right) = P\left(X \leq \ln a\right) = F_X(\ln a).$$

Logo,

$$f_Y(a) = F'_Y(a) = F'_X(\ln a) = \frac{1}{a} f_X(\ln a).$$

Distribuição binomial negativa

X tem *distribuição binomial negativa* com parâmetros $r \in \mathbb{N}$ e $p \in (0,1)$ se:

$$p(n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}, \text{ para } n \in \{r, r+1, \dots\}.$$

Notação: $X \sim BN(r,p)$.

Observação!

X pode ser interpretada como o número de ensaios independentes de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p, que devem ser realizados até obter um total de r sucessos.

Note que, para $n \in \{r, r+1, \ldots\}$, por exemplo, a configuração

$$\sigma : \underbrace{\underset{1}{\checkmark}\ \underset{2}{\checkmark}\ \underset{3}{\times}\ \underset{4}{\times}\ \underset{5}{\checkmark}\ \cdots\cdots\ \underset{n-3}{\checkmark}\ \underset{n-2}{\checkmark}\ \underset{n-1}{\times}}\ \underset{n}{\checkmark}$$

$r-1$ sucessos ($\checkmark$)
$n-r$ fracassos ($\times$)

é favorável para a ocorrência de $\{X = n\}$. Como temos $\binom{n-1}{r-1}$ formas diferentes de obter uma configuração destas e como

$$P(\sigma) = p^r(1-p)^{n-r},$$ por independência!

concluímos que

$$P(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}.$$

Exemplo 8.1

Se lançamentos independentes de uma moeda viciada, com probabilidade p de dar cara em cada lançamento, são realizados, qual é a probabilidade de que r caras sejam observadas antes de m coroas?

Solução. *Note que o evento de interesse ocorre se, e somente se,*

"a r-ésima cara ocorrer até o $(r+m-1)$-ésimo lançamento".

Logo, se X é o número de lançamentos até a ocorrência da r-ésima cara, temos que $X \sim BN(r,p)$ e que a probabilidade desejada é:

$$P(X \leq r+m-1) = \sum_{n=r}^{r+m-1} \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}.$$

Distribuição hipergeométrica

X tem *distribuição hipergeométrica* com parâmetros n, N, m, com $N \in \mathbb{N}$ e $n, m \in \{1, \ldots, N\}$ se:

$$p(i) = \frac{\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}}, \text{ para } i \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Notação: $X \sim H(n, N, m)$.

Observação!

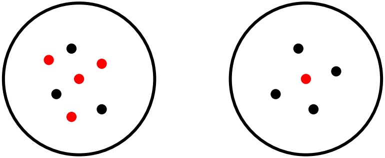
Suponha que uma amostra de tamanho n é escolhida ao acaso de uma urna contendo N bolas, das quais m são brancas e $N - m$ são pretas. X pode ser interpretada como o número de bolas brancas selecionadas.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CCEN CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

Exemplo 8.2

Considere 10 *urnas contendo bolas vermelhas e pretas, tais que:*



3 *urnas*

com esta composição

7 *urnas*

com esta composição

Escolha uma urna ao acaso e, da urna escolhida, retire ao acaso 3 *bolas (sem reposição). Determine a probabilidade de selecionar pelo menos* 1 *bola vermelha.*

... continuação do Exemplo 8.2. Se A é o evento de interesse e

$$U = \text{“a urna escolhida tem exatamente 4 bolas vermelhas”}$$

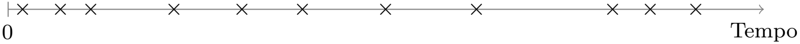
então

$$P(A^c) = \underbrace{P(A^c|U)}_{\frac{\binom{4}{0}\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}}}\overbrace{P(U)}^{\frac{3}{10}} + \underbrace{P(A^c|U^c)}_{\frac{\binom{1}{0}\binom{4}{3}}{\binom{5}{3}}}\overbrace{P(U^c)}^{\frac{7}{10}}$$

Por exemplo, $P(A^c|U) = P(X = 0)$ em que $X \sim H(3, 7, 4)$!

Lembrete: Processo de Poisson de parâmetro λ

Um Processo de Poisson de parâmetro λ unidimensional, denotamos $P.P.(\lambda)$, pode ser representado como uma sequência de pontos em $\mathbb{R}^+$:



tais que, se $N(B)$ = número de pontos no intervalo $B \subset \mathbb{R}^+$, então:

- $N(B) \sim Poisson(\lambda|B|)$;
- $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^+$ intervalos, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, então $N(B_1)$ e $N(B_2)$ são independentes.

Observação!

Podemos estender o anterior para qualquer $B \in \mathcal{B}$, com $|B|$ representando a medida de Lebesgue de B.

Exemplo 8.3

Suponha que as ocorrências de um evento de interesse acontecem segundo um P.P.(10). Se $N(s,t)$ denota o número de ocorrências entre os instantes s e t, determine $P(N(0,1)=2|N(0,5)=5)$.

Solução. *Note que*

$$P(N(0,1)=2|N(0,5)=5)=\frac{P(\{N(0,1)=2\}\cap\{N(0,5)=5\})}{P(N(0,5)=5)},$$

e $N(0,5)\sim Poisson(50)$*:* $P(N(0,5)=5)=e^{-50}\dfrac{50^5}{5!}$. *Por outro lado,*

$$\{N(0,1)=2\}\cap\{N(0,5)=5\}=\{N(0,1)=2\}\cap\{N(1,5)=3\}.$$

Então

$$P(\{N(0,1)=2\}\cap\{N(0,5)=5\})=P(\{N(0,1)=2\})P(\{N(1,5)=3\}).$$

... continuação do Exemplo 8.3. Finalmente,

$$P(N(0,1)=2|N(0,5)=5)=\frac{\left\{e^{-10}\dfrac{10^2}{2!}\right\}\left\{e^{-40}\dfrac{40^3}{3!}\right\}}{e^{-50}\dfrac{50^5}{5!}},$$

que reescrevendo é:

$$P(N(0,1)=2|N(0,5)=5)=\binom{5}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^3.$$

Observação!

Para um $P.P.(\lambda)$: dado que $N(0,t)=n$, as posições dos n pontos estão distribuídas em $(0,t)$ como n variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição $U(0,t)$.

Exemplo 8.4

Ocorrências de um evento de acordo com um P.P.(λ). *Se* T_1 *é o instante da primeira ocorrência então* $T_1 \sim Exp(\lambda)$. *De fato, se*

$$F_{T_1}(t) = P(T_1 \leq t),$$

como

$$\{T_1 > t\} = \{N(0,t) = 0\},$$

e $N(0,t) \sim Poisson(\lambda t)$, *então*

$$F_{T_1}(t) = 1 - P(T_1 > t) = 1 - P(N(0,t) = 0) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Observação!

Para um P.P.(λ): *se* $T_1, T_2, \ldots$ *são as distâncias entre um ponto e o seguinte ponto do processo então estas são i.i.d. com distribuição* $T_1 \sim Exp(\lambda)$.

Distribuição gama

X tem *distribuição gama* com parâmetros $\alpha \in (0, \infty)$ e $\lambda \in (0, \infty)$ se:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-y} y^{\alpha - 1} dy$ (função gama).

Notação: $X \sim Gama(\alpha, \lambda)$.

Observação!

$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$. *Em particular,* $\Gamma(n) = (n-1)!$ *se* $n \in \mathbb{N}$.

$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{-1/2} dy$. Fazendo $x = \sqrt{2y}$ temos que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \sqrt{2} e^{-x^2/2} dx = 2\sqrt{\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \right\},$$

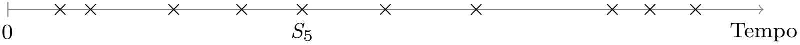
isto é: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{\pi} P(Z > 0) = \sqrt{\pi}$.

Observação!

Se $X \sim Gama(n/2, 1/2)$ *então* $X \sim \chi^2_n$.

Processo de Poisson

Considere um $P.P.(\lambda)$ e seja S_n o instante da n-ésima ocorrência(ou a distância entre o 0 e o n-ésimo ponto). Então $S_n \sim Gama(n, \lambda)$.



De fato, como $\{S_n \leq t\} = \{N(0,t) \geq n\}$, então

$$P(S_n \leq t) = P(N(0,t) \geq n) = \sum_{i=n}^{\infty} P(N(0,t) = i) = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^i}{i!}.$$

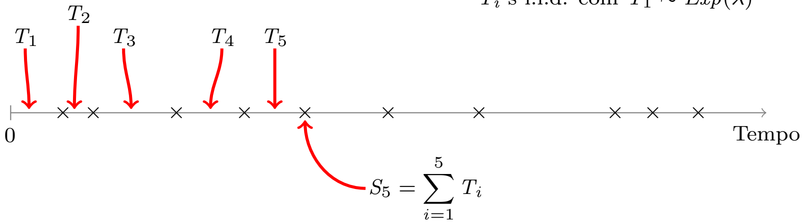
Logo,

$$f_{S_n}(t) = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{i-1}}{(i-1)!} - \sum_{i=n}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^i}{i!} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Processo de Poisson

Lembre que:

T_i's i.i.d. com $T_1 \sim Exp(\lambda)$



Observação!

Se $T_1, T_2, \ldots, T_n$ *são i.i.d. com* $T_1 \sim Exp(\lambda)$ *então* $\sum_{i=1}^{n} T_i \sim Gama(n, \lambda)$.

Distribuição beta

X tem *distribuição beta* se:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)}, & \text{se } x \in (0,1), \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$ (função beta).

Notação: $X \sim Beta(a,b)$.

Observação!

A relação entre as funções beta e gama é dada por $B(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

Bom estudo!