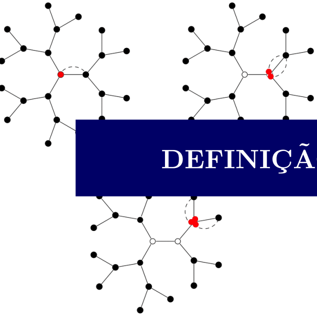
ET581 - Probabilidade 1

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE



DEFINIÇÃO AXIOMÁTICA DE PROBABILIDADE

Prof. Pablo M. Rodriguez

https://www.pablo-rodriguez.org/et581-probabilidade1

Universidade Federal de Pernambuco
CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo da Aula 9

- Probabilidade.
  - Definição clássica;
  - Definição freqüentista;
  - Definição axiomática.

Definição clássica de probabilidade

Considere um experimento aleatório com espaço amostral Ω, tal que $|\Omega| < \infty$, e suponha que cada evento simples é igualmente possível. Se $A \subset \Omega$, então a probabilidade do evento A, denotada $P(A)$, é definida por:

$$P(A) := \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Em outras palavras:

$$P(A) := \frac{\#\text{ de resultados favoráveis à ocorrência de } A}{\#\text{ de resultados possíveis}}.$$

Observação

Se $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$, *então cada* ω_i, $i \in \mathbb{N}$, *é chamado de evento simples.*

Algumas propriedades

Se Ω é finito com resultados igualmente prováveis então:

- $P(A) \geq 0$ para todo $A \subset \Omega$: Como $|\Omega| > 0$ e $|A| \geq 0$ temos

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \geq 0.$$

- Se A e B são eventos tais que $A \cap B = \emptyset$, então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

  De fato

$$P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \frac{|A| + |B|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|B|}{|\Omega|} = P(A) + P(B).$$

Princípio aditivo

- $P(\Omega) = 1$: É direto pois $P(\Omega) = |\Omega|/|\Omega| = 1$.

Exemplo 9.1

Considere o experimento de lançar uma moeda honesta e observar o resultado. Neste caso

$$\Omega = \{C, \overline{C}\}$$

é um exemplo de espaço amostral finito. Como a moeda é honesta podemos supor que os eventos simples são igualmente possíveis:

$$P(C) = P(\overline{C}).$$

Portanto, da definição clássica de probabilidade:

$$P(C) = P(\overline{C}) = \frac{|\overline{C}|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 9.2

Um comitê de 5 pessoas deve ser selecionado de um grupo de 7 homens e 6 mulheres. Se a seleção for feita aleatoriamente, qual é a probabilidade de que o comitê seja formado por 2 homens e 3 mulheres?

Neste caso, Ω é formado por todos os comitês possíveis de 5 pessoas que podem ser formados do grupo original de 7 homens e 6 mulheres. Note que

$$|\Omega| = \binom{13}{5} = \frac{13!}{5! \times 8!} = \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 1.287.$$

Por outro lado, como a seleção é feita aleatoriamente, cada comitê possível de 5 pessoas tem a mesma probabilidade de ser escolhido.

... continuação do Exemplo 9.2. Logo, se A denota o evento:

"o comitê é formado por 2 homens e por 3 mulheres"

então

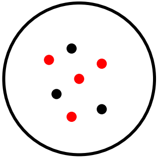
$$|A| = \binom{7}{2}\binom{6}{3} = \left(\frac{7!}{2! \times 5!}\right)\left(\frac{6!}{3! \times 3!}\right) = 420.$$

Logo,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{7}{2}\binom{6}{3}}{\binom{13}{5}} = \frac{420}{1.287} \approx 0,326$$

Exemplo 9.3

Se 3 bolas são retiradas aleatoriamente de uma urna contendo 3 bolas pretas e 4 bolas vermelhas, qual é a probabilidade de que uma das bolas seja preta e as outras duas sejam vermelhas?



Neste caso $|\Omega| = \binom{7}{3} = 35.$

Supondo que todas os resultados são igualmente prováveis temos que a probabilidade do evento $A =$ *"retirar uma bola preta e duas bolas vermelhas" é dada por:*

$$P(A) = \frac{\#\ \textit{de casos favoráveis}}{\#\ \textit{casos possíveis}} = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{18}{35} \approx 0,514.$$

Definição freqüentista de probabilidade

Outra forma de determinar a probabilidade de um evento consiste em repetir o experimento aleatório, digamos n vezes, e anotar quantas vezes o evento A associado ao experimento ocorre. Se

$$n(A) = \#\text{ vezes que o evento } A \text{ ocorre nas } n \text{ repetições},$$

a proporção

$$\frac{n(A)}{n}$$

chama-se freqüência relativa de A nas n repetições do experimento. A probabilidade de A é o valor $P(A)$ para o qual, a medida que n cresce:

$$\frac{n(A)}{n} \approx P(A)$$

Observação

Com a noção de limite: $P(A) = \lim_{n \to \infty} n(A)/n.$

No exemplo do lançamento n vezes de uma moeda honesta: se

$$n(C) = \# \text{ de lançamentos nos que observamos o resultado cara;}$$

então

$$\frac{n(C)}{n} \approx \frac{1}{2}$$

para valores de n suficientemente grandes.

Algumas propriedades

Note que, definido desta forma:

- $P(A) \geq 0$ para todo $A \subset \Omega$: Pois $n(A) \geq 0$, para todo n. Lembre:
$$P(A) \approx \frac{n(A)}{n}.$$
- Se A e B são eventos tais que $A \cap B = \emptyset$, então
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$
De fato
$$P(A \cup B) \approx \frac{n(A \cup B)}{n} = \frac{n(A) + n(B)}{n} = \frac{n(A)}{n} + \frac{n(B)}{n} \approx P(A) + P(B).$$
- $P(\Omega) = 1$: É direto pois $n(\Omega) = n$ para qualquer n.

Motivação

Experimento 1

Jogue dois dados equilibrados e observe o número das faces superiores.

Ω	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$\Omega = \{(i,j) : i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\}.$

- Se $A =$"soma dos números é 5", então $A \subset \Omega$ é dado por

$$A = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}.$$

- Se $B =$"o menor dos números é o 2", então $B \subset \Omega$ é dado por

$$B = \{(i,j) \in \Omega : \min\{i,j\} = 2\}.$$

Pela def. clássica de probabilidade:

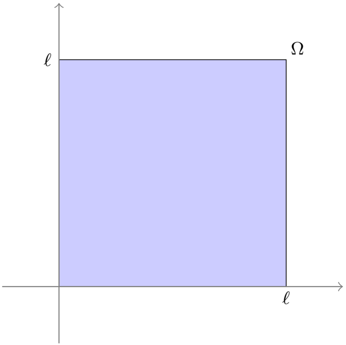
$$P(A) = \frac{\#\text{ resultados favoráveis}}{\#\text{ resultados possíveis}}.$$

Logo $P(A) = \frac{1}{9}$ e $P(B) = \frac{1}{4}$.

Motivação

Experimento 2

Escolha ao acaso um ponto do quadrado de lado ℓ.

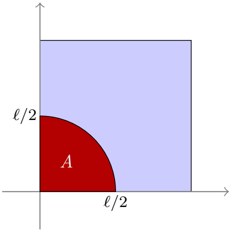


$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in [0,\ell]\}.$$

- Se $A =$"distância entre o ponto escolhido e a origem é $\leq \ell/2$", então

$$A = \left\{(x,y) \in \Omega : \sqrt{x^2+y^2} \leq \ell/2\right\}.$$

Isto é:



A probabilidade geométrica é:

$$P(A) = \frac{\#\text{ área de } A}{\#\text{ área de } \Omega}.$$

Logo, $P(A) = \pi/16$.

Espaço de probabilidade: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

conjunto arbitrário $\left\{ \begin{array}{c} \mathcal{P}(\Omega) \text{ é o conjunto} \\ \text{das partes de } \Omega \end{array} \right\}$

$$P : \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$$

medida de probabilidade

$$\left\{ \begin{array}{l} P(A) > 0 \\ P(\Omega) = 1 \\ P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \end{array} \right\}$$

(para $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$)

σ-álgebra de subconjuntos de Ω

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega \in \mathcal{F} \\ A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F} \\ A_n \in \mathcal{F}, n \geq 1 \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F} \end{array} \right\}$$

Definição axiomática de probabilidade

A função $P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma probabilidade se:

Axioma 1. $P(A) \geq 0$ para todo $A \subset \Omega$.

Axioma 2. $P(\Omega) = 1$.

Axioma 3. Se $A_1 \subset \Omega$, $A_2 \subset \Omega$, e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, então

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2).$$

Observação

O ***Axioma 3*** *pode ser extendido para* $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$, *desde que* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *sempre que* $i \neq j$.

Propriedades

As seguintes propriedades resultam dos axiomas:

1. $P(\emptyset) = 0$.
   - *Prova:* Note que $P(\emptyset) = P(\emptyset \cup \emptyset) \overset{\mathbf{A3}}{=} 2P(\emptyset)$.
2. $P(A^c) = 1 - P(A)$.
   - *Prova:* $1 \overset{\mathbf{A2}}{=} P(\Omega) = P(A \cup A^c) \overset{\mathbf{A3}}{=} P(A) + P(A^c)$.
3. Se $A_1 \subset A_2$ então $P(A_1) \leq P(A_2)$.
   - *Prova:* Como $A_1 \subset A_2$ então $A_2 = A_1 \cup (A_2 \cap A_1^c)$. Logo,

$$P(A_2) = P(A_1 \cup (A_2 \cap A_1^c)) \overset{\mathbf{A3}}{=} P(A_1) + \underbrace{P(A_2 \cap A_1^c)}_{\geq 0 \text{ por } \mathbf{A1}} \geq P(A_1).$$

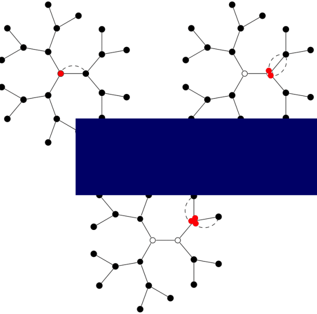
Referência!

Ross, S. Probabilidade: Um curso moderno com aplicações, 8a ed., Bookman, 2010.

Exercícios:

- Capítulo 1 (Ross):
  - 2.2, 2.3, 2.5, 2.6, 2.8 (pág. 71).

Entregar os exercícios em vermelho na segunda-feira 12/07!



Bom estudo!